CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS

Patronato «Alfonso el Sabio»

4.ª Serie. - Tomo IX	1949	Números 5 y 6

REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

PUBLICADA POR EL INSTITUTO «JORGE JUAN» DE MATEMATICAS Y LA REAL SOCIEDAD MATEMATICA ESPAÑOLA

MADRID

1949

Nuevas Gráficas, S. A.—Tel. 23 30 29

THEORIE ARITHMETIQUE DES CORRESPONDANCES ALGEBRIQUES

Par

PEDRO ABELLANAS

INTRODUCTION

Une correspondance algébrique irreductible se definit, [5], au moyen d'une variété algébrique double irreductible, $\mathfrak{V}$, qui est representée par un idéal prémier et bihomogène d'un anneau en deux series d'indeterminées $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$. Si $(\xi_0, \ldots, \xi_n; \eta_0, \ldots, \eta_m)$ c'est un point général de $\mathfrak{V}$, $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ est point général de la variété originale V, et $(\eta_0, \ldots, \eta_m)$ est un point général de la variété image, V'.

Notations. Nous mettrons:

$$\Omega = k(\xi_0, \ldots, \xi_n; \eta_0, \ldots, \eta_m),\ P^* = k[\xi_0, \ldots, \xi_n; \eta_0, \ldots, \eta_m],$$
$$\Sigma = k(\xi_0, \ldots, \xi_n), \quad P = k[\xi_0, \ldots, \xi_n],$$
$$\Sigma' = k(\eta_0, \ldots, \eta_m), \quad P' = k[\eta_0, \ldots, \eta_m].$$

Jusqu'à Zariski, [8], on appellait transformée d'une sousvariété de V, chez une correspondance birrationnelle, à l'ensemble des transformées de tous leurs points. Cette definition, qui dans les plans ou surfaces n'introduit pas de graves complications, obscurcit notablement les choses quand il s'agit de développer une théorie générale des correspondances birrationnelles ou algébriques entre variétés quelconques. Pour celà Zariski introduisit, dans le cas des correspondances birrationnelles, le concept de transformée d'une sous-variété dependant seulement de la dite sousvariété considérée comme une unité, tandis qu'à l'ancien concept il l'appellà *transformée totale*. Zariski établit le concept de transformée, (l. c. pag. 519) par l'intermediaire de sa définition évaluation-théoretique des correspondances birrationnelles, mais, comme nous prouvons dans le § 13 du present mémoire, tel concept peut être défini directement, non seulement chez les correspondances birrationnelles, mais aussi chez les algébriques, de la manière suivante: si $\mathfrak{P}$ est l'idéal prémier et homogène de P correspondant à la sous variété, W, de V considerée, et si $\mathfrak{P}^*_1, \ldots, \mathfrak{P}^*_g, \mathfrak{P}^*_{g+1}, \ldots, \mathfrak{P}^*_{g+h}, \mathfrak{P}^*_{g+h+1}, \ldots, \mathfrak{P}^*_{g+h+k}$ sont tous les diviseurs prémiers minimes de $P^* \mathfrak{P}$, ceux-ci sont formés, en général, par trois categories d'idéals: 1-èr. Ceux. $\mathfrak{P}^*_1, \ldots, \mathfrak{P}^*_g$, qui gissent sur $\mathfrak{P}$. 2-ème. Ceux qui gissent sur un diviseur propre de $\mathfrak{P}$ distinct de l'irrelevant: $\mathfrak{P}^*_{g+1}, \ldots, \mathfrak{P}^*_{g+h}$. 3-ème. Ceux qui gissent sur l'irrelevant: $\mathfrak{P}^*_{g+h+1}, \ldots, \mathfrak{P}^*_{g+h+k}$. Et bien, ce que nous appellons transformée d'une sous variété, W, et qui coincide chez les correspondances birrationnelles avec la définition mentionée de Zariski, est la sous variété representée par les ideals $\mathfrak{P}^*_1 \cap P', \ldots, \mathfrak{P}^*_g \cap P'$.

Le concept de «transformée» permet de définir, à leur tour, trois autres concepts, introduits par Zariski chez les correspondances birrationnelles, d'importance fondamentale dans toute la théorie; ce sont les sous-variétés régulières, irrégulières et fondamentales. Anterieurement à Zariski on introduisait le concept de sous variété fondamentale (sur qui reposant tous les trois) par rapport à une corespondance birrationnelle par la condition que la sous variété image fut d'une dimension superieure à la dimension de la sous variété originale, mais, comme Zariski a prouvé, [9], cette définition n'est pas applicable quand la variété originale a des singularités. Les définitions données par Zariski, pour les correspondances birrationnelles (l.c. pages 512 et 514) reposent sur l'isomorphisme des corps des fonctions rationnelles sur la variété originale et la variété image, le quelle et characteristique le ceux-là. Pour celà, notre définition (def. 1.10) nous l'avons fondamentée directement sur la définition complète de la correspondance au moyen de la variété double $\mathfrak{V}$, et elle s'appuye dans le Th. 1.10. Pour pouvoir employer le concept de sous variété non fondamentale de la façon la plus commode possible dans notre définition parametrique des correspondances algébriques, nous démonstrons le Th. 2.10 qui joue un rôle fondamental dans la théorie.

Un autre point essentiel dans la presente mémoire est notre *définition paramétrique des correspondances algèbriques.* Cette définition correspond à la définition des correspondances birrationnelles au moyen de l'isomorphisme entre les corps Σ et Σ' ou, ce qui revient au meme, moyenant les expresions :

$$\frac{\eta_{i0}}{\varphi_0(\xi)} = \frac{\eta_{i1}}{\varphi_1(\xi)} = \ldots = \frac{\eta_{im}}{\varphi_m(\xi)} = \varsigma \qquad [1]$$

L'avantage de la définition (1) sur la définition au moyen de la variété double est fondée en ce qu'au moyen de (1) on peut étudier plus facilément touts les questions rélatives à dimensions de la sous variété originale et des composants de son imâge ; cependant elle a l'inconvenent de ne pas être complète, c. à d., les équations (1) ne sont pas équivalents avec celles de la définition au moyen de la variété double. Les équations que nous avons trouvé (§ 9) au lieu des (1) pour les correspondances algébriques sonts les suivantes :

$$\eta_{ii}^{\rho_i} + e_1^{(i)}(\varsigma_0, \ldots, \varsigma_a)\, \eta_{ii}^{\rho_i - 1} + \ldots + e_{\rho_i}^{(i)}(\varsigma_0, \ldots, \varsigma_a) = 0, \quad i = 0, \ldots, m \qquad [2]$$

où $a+1$ est le dégrée de transcendence de Ω sur Σ, les ς_i, $i=0, \ldots, a$ sont des formes lineaires de $\Sigma[\eta_{i0}, \ldots, \eta_{im}]$ algébriquement independantes sur Σ et $e_j^{(i)}(\varsigma_0, \ldots, \varsigma_a)$ est une forme de dégré j par rapport des (ς) appartenent à $P[\varsigma_0, \ldots, \varsigma_a]$.

Les expresions (2), auxquelles nous appellons *paramétriques de la correspondance algébrique,* ne sont pas équivalentes aux équations qui définissent la variété double $\mathfrak{B}$ (c'est ce qui arrive aussi avec les (1)) et dans le cas particulier des correspondances birrationnelles coincident avec celles-ci ; alors, pour pourvoir employer les rélations (2) il est necessaire de faire un complement de définition, qui nous faissons au moyen de la théorie d'évaluations. Il faut tenir compte d'observer que dans les correspondances birrationnelles il on arrive le même si l'on emploie les équations (1) ; c'est alors, quand on fait usage des considerations du pasage à la limite (de la primitive école intuitive), ou de la spécilisation (v. d. Waerden et Weil), ou de la théorie de l'évaluations (Zariski). A toutes fins anterieurement indiquées nous introduisons la suivante déf. 8.1: «Deux sous variétés de V et V′, respectivement, s'appellent homologues dans la correspondance algébrique, quand il-y-a une évaluation de Ω tel que les evaluations par elle subordonnées dans Σ et Σ' ils ont pour centres dans V et V′ respectivement les sous variétés données». Cette définition est justifié par le T. 2.8.

Au moyen de la définition anterieure on peut faire usage des équations paramétriques (2) et de ses analogues:

$$\xi_i^{\tau_i} + d_1^{(i)}(\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b)\,\xi_i^{\tau_i-1} + \ldots + d_{\tau_i}^{(i)}(\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b) = 0 \qquad [2']$$
$$i = 0, \ldots, n$$

(où l'on peut répéter ce qui a été dit pour les (2) sans rien plus que changer a pour b, les (ξ) par les (η), celles-ci par celles-là et les (ζ) par les (ζ')), ou bien, des variétés afines V^*_1 et V^*_2 des espaces afines $A_{n+m+a+1}$ et $A_{n+m+b+1}$ definies par les points géneraux $(\xi_0, \ldots, \xi_n, \eta_0, \ldots, \eta_m, \zeta_0, \ldots, \zeta_a)$ et $(\xi_0, \ldots, \xi_n, \eta_0, \ldots, \eta_m, \zeta'_0, \ldots, \zeta'_b)$ respectivement. L'emploi de ces variétés, V^*_1 et V^*_2, au lieu de la variété double $\mathfrak{V}$ offre les suivants avantages: 1-èr. Les anneaux $P^*_1 = P^*[\zeta_0, \ldots, \zeta_a]$ et $P^*_2 = P^*[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b]$ dépendent intégrement (sind ganz abhängig) des anneaux $\bar{P} = P[\zeta_0, \ldots, \zeta_a]$ et $\bar{P}' = P'[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b]$ respectivement. 2-ème. $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ sont des ampliations transcendentes pures de P et P′ respectivement; d'où si P et P′ sont intégrement fermés le sont aussi $\bar{P}$ et $\bar{P}'$. 3-ème. Si $\mathfrak{P}$ est une sous variété non fondamentale de V et $\mathfrak{P}^*_1$ un d.p.m.* de $P^*\mathfrak{P}$ qui git sur $\mathfrak{P}$, il-y-a un d.p.m., $\mathfrak{p}^*_1$, de $P^*_1\mathfrak{P}$ qui git sur $\mathfrak{P}^*_1$ (Th. 1.11). 4-ème. En vertu de la mémoire [2] de Krull, on a, dans l'hypothèse d'être P et P′ intégrement fermées, que $\dim.(\mathfrak{p}^*_1) = \dim.(\mathfrak{p}^*_1 \cap \bar{P} = \bar{P}\,\mathfrak{P}) = \dim.(\mathfrak{P}) + a + 1$. 5-ème. Si $\mathfrak{P}$ est régulièr, la sous-variété $\mathfrak{p}^*_1$ de V^*_1 est régulière dans la correspondance birrationnelle entre V^*_1 et V^*_2 (Th. 2.12). En vertu des propriétés précedentes on obtient les rélations entre la dimension d'une sous variété régulière de V et celle de sa transformée données par le Th. 2.12.

Comme on a indiqué, il y a un interet especiel à ce que les

---

*) Nous representerons, quelques fois, dans ce qui suit au moyen des initiales: d.p.m. les *diviseurs prémiers minimes*.

variétés V et V′ soient normales, ceci peut toujours s'obténir, si le corps base est algébriquement fermé, au moyen de deux transformations birrationnelles, suivant ce qu'on établit dans le Th. 4.8.

La prémièr partie de la présente mémoire est dédiée à l'étude des proprietés rélatives à extensions d'évaluations d'un corps à un sur-corps, ainsi que les rélations entre les centres d'une évaluation, et celles de leurs élargies ou subordonnées, dans les variétés de l'espace projectif ordinaire ou double correspondants à ces corps-là, les quelles sont necessaires pour l'étude des correspondances algébriques qu'on fait dans la seconde partie. Nous signalerons, dérnièrement, que l'emploi des variétés V^*_1 et V^*_2 impose l'usage d'évaluations dans les corps homogènes et bihomogènes (la characterisation arithmétique des prémiers à été faite par Zariski, l. c., et celle des seconds nous l'avons faite dans la prop. 2.6 de la présente mémoire. Géométriquement on peut les définir comme des corps des fonctions rationnelles sur une variété algébrique de l'espace projectif ordinaire ou double, respectivement) au lieu d'opérer sur corps non homogènes correspondants.

Les nombres entre les parenthèses rectangulaires s'en rapportent à la literature indiqué au finale de la mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉMIÈR PARTIE

Quelques proprietés des évaluations des corps de fonctions rationnelles sur des varietés algébriques ordinaires et doubles.

DEUXIÈME PARTIE

Correspondances Algébriques

I PARTIE. — QUELQUES PROPRIETES DES EVALUATIONS DES CORPS DES FONCTIONS RATIONNELLES SUR DES VARIETES ALGEBRIQUES ORDINAIRES ET DOUBLES

§ 1. Evaluations composées.

Soient: $(\xi_0, ..., \xi_n)$ les coordonnées du point général, [6] d'une variété algébrique irreductible, V; $\Sigma = k(\xi_0, ..., \xi_n)$, le corps des fonctions rationnelles sur V; k un corps des constants arbitraire; v et v' deux évaluations de Σ; R_v, $R_{v'}$, $\mathfrak{p}_v$ et $\mathfrak{p}_{v'}$ leurs respectifs anneaux d'évaluation et idéals de non unités ; $\Sigma_1 \approx R_v/\mathfrak{p}_v$ et $\Sigma'_1 \approx R_{v'}/\mathfrak{p}_{v'}$, les corps residuels correspondants; τ et τ' les homomorphismes: $\Sigma \sim (\Sigma_1, \infty)$ et $\Sigma \sim (\Sigma'_1, \infty)$ définies par les evaluations v et v' respectivement.

S'il-y-a un homomorphisme, τ'': $\Sigma_1 \sim (\Sigma'_1, \infty)$, tel que $\tau' = \tau''\tau$ on dit que l'évaluation v' est composée avec l'évaluation v.

Proposition 1.1. *La condition necessaire et suffisante pour que l'évaluation v' soit composée avec la v est que* $R_{v'} \subset R_v$; *alors* $\mathfrak{p}_v$ *est le conducteur de* $R_{v'}$ *par rapport à* R_v.

Demonstration. *La condition est necessaire.* Soit ω un élément arbitraire de $R_{v'}$ alors $\tau'(\omega) \in \Sigma'_1$, d'où $\tau(\omega) \in R_{v''}$, étant $R_{v''}$ l'anneau d'évaluation de l'évaluation v'' du coprs Σ_1, et, á fortiori, $\tau(\omega) \in \Sigma'_1$, d'où $\omega \in R_v$, c'est-á-dîre, $R_{v'} \subseteq R_v$. Or, $R_{v''}$ est un sous-anneau propre de Σ_1 et, pour tant, il existe un élément $\omega_1 \in \Sigma_1$, $\omega_1 \notin R_{v''}$, et si ω^* est un élément de R_v tel que $\tau(\omega^*) = \omega_1$ serait $\tau'(\omega^*) = \tau''(\omega_1) = \infty$, d'où $\omega^* \notin R_{v'}$ et $\omega^* \in R_v$, alors $R_{v'} \subset R_v$.

De $R_{v'} \subset R_v$ *on déduit que* $\mathfrak{p}_v$ *est le conducteur de* $R_{v'}$ *par rapport á* R_v. Soit, en effet, p un élément arbitraire de $\mathfrak{p}_v$, alors $\frac{1}{p} \notin R_v$ et, par hypothèse, $\frac{1}{p} \notin R_{v'}$, d'où $p \in R_{v'}$, et est non unité de $R_{v'}$, alors $p \in \mathfrak{p}_{v'}$ et $\mathfrak{p}_v \subseteq \mathfrak{p}_{v'}$. Par consequent $\mathfrak{p}_v$ est ideal de $R_{v'}$ et puisque $\mathfrak{p}_v$ est l'ideal maximal de R_v, il est donc le conducteur. Si ω appartient á R_v et n'appartient pas á $R_{v'}$, $\frac{1}{\omega}$ appartiendra á $R_{v'}$ et par consequent á R_v, donc, ω n'appartient pas á $\mathfrak{p}_v$ et appartient á $\mathfrak{p}_{v'}$, donc $\mathfrak{p}_v \subset \mathfrak{p}_{v'}$.

La condition est suffisante. Puisque $\mathfrak{p}_v$ est ideal de $R_{v'}$, il resulte $R_{v'}/\mathfrak{p}_v \subset R_v/\mathfrak{p}_v$. *Les non unités de* $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$ *forment l'ideal* $\mathfrak{p}_{v'}/\mathfrak{p}_v$. En effet, si $p \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{v'})$ et $p \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_v)$, $p + \mathfrak{p}_v$ est non unité de $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$, puisque, dans un autre cas, il-y-aurait un élément, $\omega \in R_{v'}$, tel que $\omega p \equiv 1\ (\mathfrak{p}_v)$ et, comme $\mathfrak{p}_v \subset \mathfrak{p}_{v'}$, $\omega p - 1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{v'})$, d'où $1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{v'})$. Reciproquement, soit $p + \mathfrak{p}_v$ non unité de $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$, si p était unité de $R_{v'}$ il-y-aurait un élément, ω, de cet anneau tel que $p\omega = 1$, d'où $\frac{1}{p} = \omega \in R_{v'}$ et $p + \mathfrak{p}_v$ serait unité de $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$.

Le corps des quotients de $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$ *est isomorphe au corps* Σ_1. En effet, tout élément du corps des quotients de $R_{v'}/\mathfrak{p}_v$ est de la forme $\frac{r + \mathfrak{p}_v}{r_1 + \mathfrak{p}_v}$; r, $r_1 \in R_{v'}$, $r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_v)$, et, par l'hypothèse, r,

$r_1 \in R_\nu$; or, puisque $r_1 \neq 0$ $(\mathfrak{p}_\nu)$, r_1 est une unité de R_ν et $\frac{1}{r_1} \in R_\nu$, par consequent, $r\frac{1}{r_1} \in R_\nu$ et $r\frac{1}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu \in \Sigma_1$. Faisons correspondre l'élément $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu}$ du corps des quotients de $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$, l'élément $r\frac{1}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu$ de Σ_1; cette correspondance est univoque par définition. *Elle est aussi biunivoque.* En effet, si $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu} \to r\frac{1}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu$ et $\frac{r'+\mathfrak{p}_\nu}{r'_1+\mathfrak{p}_\nu} \to r'\frac{1}{r'_1} + \mathfrak{p}_\nu$ étant $r\frac{1}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu = r'\frac{1}{r'_1} + \mathfrak{p}_\nu$ il resulte $r\frac{1}{r_1} = r'\frac{1}{r'_1} + p$, $p \in \mathfrak{p}_\nu$. d'où $r = r'\frac{r_1}{r'_1} + r_1 p$ et $(r+\mathfrak{p}_\nu)(r'_1+\mathfrak{p}_\nu)$ $= (rr'_1 + \mathfrak{p}_\nu) = r'r_1 + r_1 r'_1 p) + \mathfrak{p}_\nu = r'r_1 + \mathfrak{p}_\nu = (r'+\mathfrak{p}_\nu)(r_1+\mathfrak{p}_\nu)$ d'où $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu} = \frac{r'+\mathfrak{p}_\nu}{r'_1+\mathfrak{p}_\nu}$.

Tout élément, $r^*+\mathfrak{p}_\nu$, *de* $R_\nu/\mathfrak{p}_\nu$ *est l'image d'un lélément du corps des quotients de* $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$. En effet, de $r^* \in R_\nu$ on en déduit $r^* \in \Sigma$, et, comme $R_{\nu'}$, est anneau d'évaluation de Σ tout élément, r^*, de Σ peut s'exprimer comme quotient de deux éléments, r et r_1, de $R_{\nu'}$, donc $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu}$ a-t-il comme image $\frac{r}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu = r^* + \mathfrak{p}_\nu$. Finalement, á l'élément $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu} + \frac{r_2+\mathfrak{p}_\nu}{r_3+\mathfrak{p}_\nu} = \frac{(rr_3+r_1r_2)+\mathfrak{p}_\nu}{r_1r_3+\mathfrak{p}_\nu}$ lui correspond l'élément $\frac{rr_3+r_2r_1}{r_1r_3} + \mathfrak{p}_\nu = \left(\frac{r}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu\right) + \left(\frac{r_2}{r_3} + \mathfrak{p}_\nu\right)$; et á l'élément $\frac{r+\mathfrak{p}_\nu}{r_1+\mathfrak{p}_\nu}\,\frac{r_2+\mathfrak{p}_\nu}{r_3+\mathfrak{p}_\nu} = \frac{rr_2+\mathfrak{p}_\nu}{r_1r_3+\mathfrak{p}_\nu}$ lui correspond l'élément $\frac{rr_2}{r_1r_3} + \mathfrak{p}_\nu = \left(\frac{r}{r_1} + \mathfrak{p}_\nu\right)\left(\frac{r_2}{r_3} + \mathfrak{p}_\nu\right)$. *Tout anneau de* Σ *qui contient proprement l'anneau* $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$ *contient l'inverse d'une non unité de ce dernier.* Soit $\omega_1 = \omega + \mathfrak{p}_\nu$, $\omega \in R_\nu$, un élément arbitraire de Σ_1 qui n'appartient pas à l'anneau $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$, alors $\omega \notin R_{\nu'}$ et donc $\frac{1}{\omega} \in R_{\nu'}$, $\frac{1}{\omega} + \mathfrak{p}_\nu \in \mathfrak{p}_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$, et $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu[\omega_1]$ contient l'inverse, ω_1, de la non unité $\frac{1}{\omega} + \mathfrak{p}_\nu$.

De tout cela il en découle ([3], II critère) que $R_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$ est un anneau d'évaluation de Σ_1 et $\mathfrak{p}_{\nu'}/\mathfrak{p}_\nu$ ieur ideal des non unités.

Appelons $\mathfrak{v}''$ l'évaluation correspondante: $R_{v''} = R_{v'}/\mathfrak{p}_{v}$, $\mathfrak{p}_{v''} = \mathfrak{p}_{v'}/\mathfrak{p}_{v}$ et τ'' à l'homomorphisme par elle defini. Par le premier théorème d'isomorphie, resulte

$$R_{v''}/\mathfrak{p}_{v''} = R_{v'}/\mathfrak{p}_{v} \Big/ \mathfrak{p}_{v'}/\mathfrak{p}_{v} = R_{v'}/\mathfrak{p}_{v'} = \Sigma_1, \quad \text{q. e. d.}$$

Observation. Il est bien connu le suivant théorème: «La condition necessaire et suffisante pour que le conducteur du anneau nötherien $\mathfrak{o}^*$ par rapport au sous anneau $\mathfrak{o}$ soit distinct de l'ideal zéro c'est que tout élément de $\mathfrak{o}^*$ dépende intégrement de $\mathfrak{o}$. Par consequent, de ce théorème et de la proposition precedente, il en resulte que: «Si R_v est un anneau d'évaluation et au même temps il est nötherien il n'y a pas d'évaluation composée avec $\mathfrak{v}$ et, par le lemme 4 de Zariski [8], le centre de l'évaluation $\mathfrak{v}$ est de dimension zéro.»

§ 2. Evaluations élargies aux ampliations transcendentes pures d'un corps de fonctions algébriques.

Soit $\bar{\Sigma} = \Sigma\,(\zeta_0, \ldots, \zeta_a)$ une ampliation transcendente pure du corps $\Sigma = k\,(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ des fonctions algébriques sur un corps de constantes, k, arbitraire avec une infinité d'éléments.

Proposition 1.2. *Etant donné une évaluation arbitraire, v, de Σ de dimension ρ on a: 1-ér. Il-y a des évaluations, v^*, de $\bar{\Sigma}$ élargies de v et de dimension ν, étant ν un éntier tel que $\rho \leq \nu \leq \rho + a$. 2-éme. Il-y a un nombre infini des évaluations de $\bar{\Sigma}$ élargies de v.*

Démonstration. 1-èr. Soient: R_v et $\mathfrak{p}_v$ l'anneau et l'idéal des non unités de l'évaluation $\mathfrak{v}$; $\bar{R} = R_v\,[\zeta_0, \ldots, \zeta_a]$; $\bar{\mathfrak{p}}_i = \bar{R}\,(\mathfrak{p}_v, \zeta_0, \ldots, \zeta_{i-1})$, $i=1, \ldots, a$; $\bar{\mathfrak{p}}_0 = \bar{R}\,\mathfrak{p}_v$. A cause de l'independance algébrique des (ζ_i) par rapport à Σ, les ideals $\bar{\mathfrak{p}}_i$, $i=0, \ldots, a$, gissent sur $\mathfrak{p}_v$, ils sont prémiers et dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_i)$=dim. $(\mathfrak{p}_v) + a + 1 - i$. *L'anneau* $R^* = \bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_0}$ *est un anneau d'évaluation.* En effet, a) R^* est un sous anneau propre de $\bar{\Sigma}$ et celui-ci le corps des quotients de celui-la. b) Tout élément, $\bar{\omega}$, de $\bar{\Sigma}$ on peut écrire de la façon suivante: $\bar{\omega} = \dfrac{\sum_1^r f_i m_i}{\sum_1^s g_j n_j}$ où f_i, g_j, $i=1, \ldots, r$; $j=1, \ldots, s$, appartiennent à R_v, les m_i et les n_i sont des produits, distincts, de puissances des (ς). Si $\sum_{j=1}^{s} g_j n_j \not\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_0)$, on a que $\bar{\omega} \in R^*$. Si $\sum_{i=1}^{r} f_i m_i \not\equiv (\bar{\mathfrak{p}}_0)$, on a que $\frac{1}{\bar{\omega}} \in R^*$. Si $\Sigma f_i m_i \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_0)$ et $\Sigma g_j n_j \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_0)$, à cause de l'indépendance algébrique des (ς) il en resultera que $f_i, g_j \equiv 0\ (\mathfrak{p}_v)$, $i=1, \ldots, r$; $j=1, \ldots, s$. Il peut se presenter deux sous-cas: $\min.\{v(f_1), \ldots, v(f_r), v(g_1), \ldots, v(g_s)\} = v(g_h)$ ou $\min.\{v(f_1), \ldots, v(f_r), v(g_1), \ldots, v(g_s)\} = v(f_k)$. Dans le prémier cas $\bar{\omega} = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} \frac{f_i}{g_i} m_i}{\frac{g_1}{g_h} n_1 + \ldots + n_h + \ldots + \frac{g_s}{g_h} n_h} \in R^*$ et dans le second $\dfrac{1}{\bar{\omega}} = \dfrac{\Sigma \frac{g_i}{f_k} n_i}{\frac{f_1}{f_k} m_1 + \ldots + m_k + \ldots + \frac{f_r}{f_k} m_r} \in R^*$. Soit alors v^* l'évaluation de $\bar{\Sigma}$ correspondante á l'anneau d'évaluation R^*. De $R^* \cap \Sigma = R_v$ il en resulte que v^* est une évaluation élargie de v. En outre, comme l'ideal des non unités, $\mathfrak{p}_{v^*}$, de R^* est $R^*_{\bar{\mathfrak{p}}_0}$ il en resulte que $\dim.(v^*) = \dim.(\mathfrak{p}_{v^*}) = \dim.(\bar{\mathfrak{p}}_0) = \rho + a + 1$.

Supposons démontrée l'existence d'une évaluation, v^*_i, élargie de v et de dimension $\rho + a + 1 - i$, $i < a+1$ tel que $R_{v^*_i} \supset \bar{R}_i$ $\bar{R}_i = \bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_i}$, $\mathfrak{p}_{v^*_i} \cap \bar{R} = \bar{\mathfrak{p}}_i$. Soit Σ_i le corps residuel de v^*_i et $\bar{R}_{i+1} = \bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_{i+1}}$. De $\mathfrak{p}_{v^*_i} \cap \bar{R} = \bar{\mathfrak{p}}_i$ et $\bar{\mathfrak{p}}_{i+1} \supset \bar{\mathfrak{p}}_i$ on déduit $R^*_{v^*_i} \supset \bar{R}_{\bar{\mathfrak{p}}_{i+1}}$, d'où appellant τ_i à l'homomorphisme $\bar{\Sigma} \sim (\Sigma_i, \infty)$ défini par v^*_i il resulte que $\tau_i(\bar{R}_{i+1})$ est un sous-anneau propre de Σ_i et, alors, il existe une évaluation, v'_{i+1}, de Σ_i tel que $R_{v'_{i+1}} \supseteq \tau(\bar{R}_{i+1})$ ([1], Satz 6). Soit v^*_{i+1} l'évaluation de $\bar{\Sigma}$ qui resulte de la composition de v^*_i avec v'_{i+1}, alors, $R_{v^*_{i+1}} \supseteq \bar{R}_{i+1}$ et $\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R}_{i+1} \subseteq \bar{R}_{i+1} \bar{\mathfrak{p}}_{i+1}$ d'où $\dim.(v^*_{i+1}) = \dim.(\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}}) \geqslant \dim.(\bar{R}_{i+1}\, \bar{\mathfrak{p}}_{i+1}) = \dim.(\bar{\mathfrak{p}}_{i+1}) = \dim.(\mathfrak{p}_v) + {}$ ${} + a + 1 - (i+1)$, mais, $\dim.(v^*_{i+1}) < \dim.(v^*_i) = \dim.(\mathfrak{p}_v) + a + 1 - i$ d'où $\dim.(v^*_{i+1}) = \dim.(\mathfrak{p}_v) + a + 1 - (i+1)$. En outre, de $\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R} = \mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R}_{i+1} \cap \bar{R} \subseteq \bar{R}_{i+1} \bar{\mathfrak{p}}_{i+1} \cap \bar{R} = \bar{\mathfrak{p}}_{i+1}$ on obtient: $\dim(\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R}) \geq$ $\geq \dim(\bar{\mathfrak{p}}_{i+1})$, ensuite $\dim.(\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R}) \leq \dim.(\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}})$ et, alors, $\dim.(\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R}) = \dim.(\bar{\mathfrak{p}}_{i+1})$, donc, $\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap \bar{R} = \bar{\mathfrak{p}}_{i+1}$ et $\mathfrak{p}_{v^*_{i+1}} \cap R_v = \bar{\mathfrak{p}}_{i+1} \cap R_v = \mathfrak{p}_v$, d'où $R_{v^*_{i+1}} \cap \Sigma = R_v$.

2-ème. Supposons démontrée l'existence de m évaluations diferentes, $v^*_1, v^*_2, \ldots, v^*_m$, élargies de l'évaluation v. Comme le corps $R_v/\mathfrak{p}_v$ a un nombre infini d'éléments, si $p \equiv 0\ (\mathfrak{p}_v)$ on peut choisir un élément, λ, unité de R_v, tel que $\zeta_0 + \lambda \frac{1}{p} \notin R_{v^*_i}$, $i=1, \ldots, m$. L'anneau $\overline{R} = R_v\left[\zeta_0 + \lambda \frac{1}{p}\right]$ ne contient pas l'inverse d'aucune des non unités de R_v et, une démonstration tout à fait semblable à celle du théorème 6 de Krull, [1], prouve l'existence d'un anneau d'évaluation R_{v^*} de $\overline{\Sigma}$ tel que $\overline{R} \subseteq R_{v^*}$ et qui ne contient pas l'inverse d'aucune des non unités de R_v. Il en resulte, alors, inmediatement que $R_{v^*} \cap \Sigma = R_v$. Comme $\overline{R} \subseteq R_{v^*}$, cet anneau contient à $\zeta_0 + \lambda \frac{1}{p}$ et, alors, il est different des anneaux $R_{v^*_i}$, $i=1, \ldots, m$, q.e.d.

Proposition 2.2. Toute évaluation, v, de Σ possède une évaluation élargie, v^*, à $\overline{\Sigma}$ tel que si ω est un élément arbitraire de Σ on a $v^*(\zeta_i) = v(\omega)$, i=0, ..., a.

Cette proposition est une consequence inmédiate de l'observation que l'anneau $\overline{R} = R_v\left[\frac{\zeta_0}{\omega}, \ldots, \frac{\zeta_a}{\omega}, \frac{\omega}{\zeta_0}, \ldots, \frac{\omega}{\zeta_a}\right]$ ne contient pas l'inverse d'aucune des non unités de R_v, et donc il existe une évaluation, v^*, tel que $\overline{R} \subseteq R_{v^*}$ et $R_{v^*} \cap \Sigma = R_v$ (Th. 6, [1]).

Hypothèse et notations. Supposons, à present, que $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ soient les coordonées homogènes, [7], du point général d'une variété algébrique, V, de dimension r. Nous nottons :

$$\Sigma = k(\xi_0, \ldots, \xi_n), \quad P = k[\xi_0, \ldots, \xi_n], \quad \overline{P} = P[\zeta_0, \ldots, \zeta_a],$$

$\mathfrak{P}$ à un ideal prémier, homogène et different de l'irrélévant de P et $\overline{\mathfrak{P}} = \overline{P}\,\mathfrak{P}$.

Etant les (ζ) transcendentes sur Σ, ont peut régarder $(\xi_0, \ldots, \xi_n, \zeta_0, \ldots, \zeta_a)$ comme les coordonnées homogènes du point général d'une variété $\overline{V}$.

Proposition 3.2. 1-ér. Toute évaluation de $\overline{\Sigma}$ avec son centre dans $\overline{V}$ defini par un idéal que git sur $\mathfrak{P}$, subordonne dans Σ une évaluation v avec centre $\mathfrak{P}$ dans la variété V. 2-ème. Si v *est une évaluation arbitraire de Σ avec son centre $\mathfrak{P}$ dans* V, *toute évaluation élargie de* v *à* $\bar{\Sigma}$ *a-t-il comme centre dans* $\bar{V}$ *une sous-variété definie par un idéal,* $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$, *diviseur de* $\bar{\mathfrak{P}}$ *que git sur* $\mathfrak{P}$ *ou sur l'idéal irrélevant de* P. *3-ème. Toute évaluation,* v, *de* Σ *avec son centre dans* $\mathfrak{P}$ *il a des évaluations élargies dont les centres gissent sur* $\mathfrak{P}$; *entre elles i-y-a une dont centre dans* V *est* $\bar{\mathfrak{P}}$.

Demonstration. 1-èr. Soit $\bar{v}$ une évalution de $\bar{\Sigma}$ dont le centre, $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$, dans V git sur $\mathfrak{P}$; soit v l'évaluation subordonnée dans Σ et $\mathfrak{P}'$ son centre dans V. Evidemment si $l\,(\xi_0, \ldots, \xi_n, \varsigma_0, \ldots, \varsigma_s)$ est une forme lineaire par rapport à $(\xi\,;\,\varsigma)$ avec valeur minime dans $\bar{v}$ et si $l'\,(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ est une forme lineaire par rapport aux (ξ) seulement, de valeur minime dans v, sera $\bar{v}(l) \leqslant \bar{v}(l')$; si $v(l) < v(l')$ on aurait $\xi_i \equiv 0\,(\bar{\bar{\mathfrak{P}}})$, $i=0, \ldots, n$ et $\mathfrak{P} = \bar{\bar{\mathfrak{P}}} \cap P$ serait l'irrelevant ; donc, $\bar{v}(l') = \bar{v}(l)$, d'où il en découle inmediatement la 1-èr. partie.

2-ème. Soit $\bar{v}$ une évaluation de $\bar{\Sigma}$ élargie de v et $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}$ son centre dans $\bar{V}$. Soient $l(\xi_0, \ldots, \xi_n, \varsigma_0, \ldots, \varsigma_s)$ et $l'(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ des formes lineaires de valeur minimun dans $\bar{v}$ et v respectivement, alors on a $\bar{v}(l) \leqslant \bar{v}(l')$. Soit $f(\xi, \varsigma)$ un élément arbitraire de $\bar{\mathfrak{P}}$, comme cet idéal est homogène, tous les composants homogènes, f_α, dans $f(\xi, \varsigma)$, appartient à $\bar{\mathfrak{P}}$ et, puisque $\mathfrak{P}$ est aussi homogène, on peut écrire : $f_\alpha = g_{\beta_1}(\xi, \varsigma)\,\varphi_{\gamma_1}(\xi) + \ldots + g_{\beta_s}(\xi, \varsigma)\,\varphi_{\gamma_s}(\xi)$, où les g_{β_i} sont homogènes par rapport aux $(\xi\,;\,\varsigma)$ des degrés β_i, les φ_{γ_i} sont homogènes par rapport aux (ξ) et des dégrés γ_i,

$$\beta_i + \gamma_i = \alpha, \quad \text{et} \quad \varphi_{\gamma_i} = 0\,(\mathfrak{P}) \qquad i = 1, \ldots, s;$$

d'où il resulte

$$\bar{v}\left(\frac{f_\alpha}{l^\alpha}\right) > \bar{v}\left(\frac{g_{\beta_1}}{l^{\beta_1}}\,\frac{\varphi_{\gamma_1}}{l'^{\gamma_1}} + \ldots + \frac{g_{\beta_s}}{l^{\beta_s}}\,\frac{\varphi_{\gamma_s}}{l'^{\gamma_s}}\right) > 0$$

d'où $\bar{\mathfrak{P}} \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{P}}}$.

Si $\bar{v}(l) = \bar{v}(l')$ et si $f(\xi)$ est un élément quelconque de $\bar{\mathfrak{P}}$, comme cet idéal est homogène, tous les composants homogènes, f_α, de f appartiendrant à $\bar{\mathfrak{P}}$ et, alors, à $\bar{\mathfrak{P}} \cap P$, d'où

$$\bar{v}\left(\frac{f_\alpha}{l^\alpha}\right) = v\left(\frac{f_\alpha}{l^\alpha}\right) > 0$$

et alors $f_\alpha = 0(\mathfrak{P})$ et $\bar{\mathfrak{P}} \cap P \subseteq \mathfrak{P}$. Mais, d'aprés ce que nous venons de démontrer, $\overline{\mathfrak{P}} \subseteq \bar{\mathfrak{P}}$, d'où $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{P}} \cap P \subseteq \bar{\mathfrak{P}} \cap P$, d'où finalément, $\bar{\mathfrak{P}} \cap P = \mathfrak{P}$. Si $\bar{v}(l) < v(l')$ on a $\bar{v}\left(\frac{\xi_i}{l}\right) > 0$, $i = 0, \ldots, n$, d'où $\bar{\mathfrak{P}} \cap P = (\xi_0, \ldots, \xi_n)$. D'après la proposition précedente on peuvent presenter, vraiment, les deux cas.

3-ème. La démonstration de la prémière proposition est contenue dans la précedente. Pour démontrer la deuxième proposition il faut tenir compte que, comme $\mathfrak{P}$ n'est pas l'idéal irrélevant, il existe une (ξ), p. e. ξ_0, tel que $\xi_0 \not\equiv 0(\mathfrak{P})$, et $\mathfrak{P}$ a comme idéal non homogène correspondant dans l'anneau $\mathfrak{o} = k\left[\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right]$ un idéal $\mathfrak{p}$ distinct de l'idéal unité. L'évaluation v subordonne dans $K = k\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}\right)$ une évaluation, v', dont le centre dans V est representé par $\mathfrak{p}$. Les éléments $\zeta'_i = \frac{\zeta_i}{\xi_0}$, $i = 0, \ldots, a$ sont algébriquement indépendents sur K, cet-à-dire, $K' = K(\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a)$ est une extension transcendente pure de K; d'après la Prop. 1.2, il existe une évaluation, $\bar{v}'$, élargie de v' au corps K', tel que $\mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap R_{v'}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a] = R_{v'}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a]\mathfrak{p}_{v'}$ et alors $\mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap \mathfrak{o}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a] = R_{v'}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a]\mathfrak{p}_{v'} \cap \mathfrak{o}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a]$; tout élément, $f(\xi', \zeta')$ de ce dernier idéal est de forme $f = \Sigma p_i m_i$ où les m_i sont des produits distincts de puissances des ζ'_i et, comme ceux-ci sont algébriquement indépendents sur K, les p_i appartient à $\mathfrak{p}_{v'} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$ et alors $\mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap \mathfrak{o}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a] = \mathfrak{o}[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_a]\mathfrak{p}$. Or, $\bar{\Sigma} = K'(\xi_0)$ est une extension purément transcendente de K', donc, il existe une infinité d'évaluations de $\bar{\Sigma}$ élargies de $\bar{v}'$; soit $\bar{v}$ une de celles-ci, comme ξ_0 est une forme lineaire de P de valeur minimun dans $\bar{v}$, le centre de $\bar{v}$ dans $\bar{V}$ será l'idéal homogène correspondant à $\mathfrak{o}\,[\varsigma'_0, \ldots, \varsigma'_n]\,\mathfrak{p}$, c'est à dire, l'idéal $\overline{\mathfrak{P}} = \bar{P}\,\mathfrak{P}$.

Q. e. d.

On peut considérer les coordonnées homogènes d'un point général de la variété V de l'espace projectif comme des coordonnées non homogènes du point général d'un cone, V_A, de l'espace afin A_{n+1} (de dimension superieure en une unité à la dimension de l'espace proyectif), qui projecte la variété V dés l'origine des coordonnées. En consequence, à toute évaluation de Σ on peut lui assigner trois centres: deux, W, W_A, définis par l'idéal homogène de la définition anterieur sur les varietés V et V_A respectivement et pour tant W_A sera un sous-cone de V_A; et le troisième, W′, dans V_A defini par un idéal en général non homogène. Alors on a que W_A on obtient par projection de W′ dés centre des coordonnées. Tout ce on peut établir idéal-théorétiquement de la façon suivante:

Proposition 4.2. *a) Si* v *est une évaluation de* Σ *tel que min.* $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n)\}=0$ *et si* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{p}$ *sont les idéals homogène et non homogène de leurs centres, on a* $\mathfrak{P} \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ *et* $\mathfrak{P}$ *est l'idéal engendré par toutes les formes homogènes de* $\mathfrak{p}$.

b) Si $\mathfrak{P}$ *est un idéal prémier, homogène et distinct de l'irrelevant de* P *et si* $\mathfrak{p}$ *est un diviseur prémier propre de* $\mathfrak{P}$ *non homogène et tel que entre* $\mathfrak{P}$ *et* $\mathfrak{p}$ *il n'existe pas aucun inter-idéal prémier propre, on a que toute évalution avec centre* $\mathfrak{p}$ *dans* V_A *a comme centre dans* V *la sous-variété définie par* $\mathfrak{P}$.

c) Il-y-a des évaluations avec centre $\mathfrak{P}$ *dans* V *pour les quelles on a min.* $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n)\}=0$; *en particulier, il exist une évaluation dont les centres dans* V *et dans* V_A *sont definies par le même idéal* $\mathfrak{P}$.

Démonstration. *a)* Si $f(\xi) \equiv 0\ (\mathfrak{P})$ tous les composantes homogènes, f_α, de f appartient aussi à $\mathfrak{P}$; si $v(\xi_0) = \min.\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n)\}=0$, on peut prendre ξ_0 comme forme lineaire de valeur minime, et alors, de $f_\alpha \equiv 0\ (\mathfrak{P})$, on déduit que $v\left(\frac{f_\alpha}{\xi_0^\alpha}\right) = v(f_\alpha) > 0$, d'où $f_\alpha(\xi) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ et $f(\xi) \equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Soit $\mathfrak{P}'$ l'idéal engendré par toutes les formes homogènes de $\mathfrak{p}$. Si $g_\alpha(\xi)$ est une forme arbitraire de $\mathfrak{P}'$ on a $g_\alpha \equiv 0(\mathfrak{p})$, d'où $v\left(\frac{g_\alpha}{\xi_0^\alpha}\right)=v(g_\alpha)>0$ et $g_\alpha \equiv 0(\mathfrak{P})$.

b) Comme $\mathfrak{p}$ n'est pas homogène il ne peut être pas l'irrelevant, donc, il existe une (ξ), ξ_0 p. e., tel que $\xi_0 \not\equiv (\mathfrak{p})$ d'où $v(\xi_0)=0$ et ξ_0 est une forme lineaire de P de valeur minime chez l'évaluation v. Soit $\mathfrak{P}'$ l'idéal homogène qui définit le centre de v dans V. Si $f_\alpha(\xi)$ est une forme arbitraire de $\mathfrak{P}$ sera $f_\alpha \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ d'où $v\left(\frac{f_\alpha}{\xi_0^\alpha}\right)=v(f_\alpha)>0$, donc $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$; or, comme $\mathfrak{P}'$ est homogène et $\mathfrak{p}$ il ne l'est pas, on a $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{p}$ et alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$.

c) Comme consequence du cas anterieur il suffit de considérer n'importe quelle évaluation dont le centre dans V_A soit défini par un idéal $\mathfrak{p}$, en les conditions établies dans lui; en particulier on peut prendre comme centre celui defini par l'idéal $\mathfrak{P}$ dans V_A Q. e. d.

§ 3. Extensions des évaluations composées du corps Σ à extensions algébriques de Σ.

Soit Σ un corps des fonctions algébriques sur un corps de constantes, k, arbitraire avec une infinité d'élements; Ω une ampliation algébrique finite du même et Ω^* le corps normal (galoisiènne) sur Σ, qu'on obtient par adjonction à celui-ci de tous les éléments conjugués de ceux dont l'adjontion à Σ produit Ω. Toute évaluation de Ω^* élargie d'une évaluation, v, de Σ subordonne dans Ω une évaluation élargie de v. Reciproquement, toute évaluation de Ω^* élargie d'une évaluation de Ω laquelle l'est à son tour d'une autre, v, de Σ, elle est une évaluation de Ω^* élargie de l'évaluation v.

<u>*Proposition* 1.3.</u> *Si* v *est une évaluation de* Σ *composée avec une autre évaluation,* $\bar{v}$, *du même corps et* $v^*_1 \ldots v^*_g$ *et* $\bar{v}^*_1 \ldots \bar{v}^*_h$ *sont leurs respectives évaluations élargies à* Ω, *on a que toute évaluation* v^*_i *est composée avec une* $\bar{v}^*_j$ *et chacune de celles-ci figure dans la composition d'une, au moins de celles-là.*

Démonstration. Nous ferons la démonstration de la première partie en deux passes:

a) *Tout élément de* $R_{v^*_i}$ *appartient à un des anneaux* $R_{\bar{v}^*_j}$.

En effet, par les hypothèses on a: $R_v \subset R_{\bar{v}}$; $\mathfrak{p}_{\bar{v}} \subset \mathfrak{p}_v$; $R_{v^*_i} \cap \Sigma = R_v$, $i=1, \ldots, g$; $R_{\bar{v}_j} \cap \Sigma = R_{\bar{v}}$, $j=1, \ldots, h$. Soit ω^* un élément arbitraire de $R_{v^*_i}$, si $\omega^* \in \Sigma$ évidément $\omega^* \in R_{\bar{v}_j}$, $j=1, \ldots, h$. Suppossons, alors, que $\omega^* \notin \Sigma$. *L'anneau* $R_{\bar{v}}[\omega^*]$ *ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de* $R_{\bar{v}}$. En effet, s'il-y-aurieut un élément, $\bar{p} \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_{\bar{v}})$, tel que $\frac{1}{\bar{p}} \in R_{\bar{v}}[\omega^*]$, on aurieut $\frac{1}{\bar{p}} = \bar{r}_0 \omega^{*\rho} + \ldots + \bar{r}_\rho$, $\bar{r}_i \in R_{\bar{v}}$, $i=0, \ldots, \rho$ et si nous mettons $p_i = \bar{p}\bar{r}_i$, result $p_i \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_{\bar{v}})$, $i=0, \ldots, \rho$, et, à fortiori, $p_i \equiv 0(\mathfrak{p}_v)$, $i=0, \ldots, \rho$; alors $1 = p_0 \omega^{*\rho} + \ldots + p_\rho$. Mais, $\mathfrak{p}_v \subset \mathfrak{p}_{v^*_i}$ $i=1, \ldots, g$ donc, $1 \equiv 0 (\mathfrak{p}_{v^*_i})$; contradiction. Il exist, alors, un anneau d'évaluation, $R^*_{v^*}$, de Ω qui contient à $R_{\bar{v}}[\omega^*]$, ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de $R_{\bar{v}}$ et est maximun dans Ω par rapport à cette condition. Alors $R_{v^*} \cap \Sigma = R_{\bar{v}}$ et v^* coïncide avec quelcune des $\bar{v}^*_j$.

b) *Il exist un anneau* $R_{\bar{v}^*_j}$ *qui contient à* $R_{v^*_i}$. Démonstration «ad adsurdum». Si $R_{v^*_i}$ n'etait pas contenu dans aucun anneau $R_{\bar{v}^*_j}$, $j=1, \ldots, h$ il existirait un élément, ω^*_1, tel que $\omega^*_1 \in R_{v^*_i}$, $\omega^*_1 \notin R_{\bar{v}^*_1}$. Supposons démontrée l'existence d'un élément, ω^*_l, tel que $\omega^*_l \in R_{v^*_i}$ $\omega^*_l \notin R_{\bar{v}_j}$, $j=1, \ldots, l$, étant tous ces anneaux différents entre eux. En raison de *a*), exist un anneau, $R_{\bar{v}^*_{l+1}}$, tel que $\omega^*_l \in R_{\bar{v}^*_{l+1}}$. Les anneaux $R_{\bar{v}^*_j}$, $j=1, \ldots, l+1$ sont, alors, distincts deux à deux. Comme $R_{v^*_i} \nsubseteq R_{\bar{v}^*_{l+1}}$, il-y a un élément, ω^*, tel que $\omega^* \in R_{v^*_i}$ et $\omega^* \notin R_{\bar{v}^*_{l+1}}$. Soient c_1 et c_2 deux éléments de k distincts et differents de zéro; les éléments $\omega^* + c_1 \omega^*_l$ et $\omega^* + c_2 \omega^*_l$ n'appartiennt pas au même anneau: $R_{\bar{v}^*_1}, \ldots, R_{\bar{v}^*_l}, R_{\bar{v}^*_{l+1}}$, parceque dans un tel cas les éléments

$$\omega^* = \frac{1}{c_2 - c_1}[c_2(\omega^* + c_1 \omega^*_l) - c_1(\omega^* + c_2 \omega^*_l)]$$

et
$$\omega^*_l = \frac{1}{c_1 - c_2}[(\omega^* + c_1 \omega^*_l) - (\omega^* + c_2 \omega^*_l)]$$

appartiendraient au dit anneau. Comme k a, par hypothèse, une infinité d'éléments on peut en determiner un, c, tel que $\omega^*_{l+1} =$

$=\omega^{*}+c\omega^{*}_{j}$ n'appartient pas à aucun des anneaux $R_{\bar{v}^{*}_{1}}, \ldots, R_{\bar{v}^{*}_{i+1}}$; mais, $\omega^{*}_{i+1} \in R_{v^{*}_{i}}$ et, par *a*), il-y aurait un autre anneau d'évaluation, $R_{\bar{v}^{*}_{i+2}}$, tel que $\omega^{*}_{i+1} \in R_{\bar{v}^{*}_{i+2}}$. Alors, il-y-aurait une infinité d'anneaux d'évaluation de Ω correspondants á évaluations de Ω élargies de l'évaluation v, en contradiction avec le théorème 19, [1].

Soient $v^{**}_{1}, \ldots, v^{**}_{m}$ et $\bar{v}^{**}_{1}, \ldots, \bar{v}^{**}_{n}$ les évaluations de Ω^{*} élargies des évaluations v et $\bar{v}$ respectivement. Etant donné une évaluation arbitraire $\bar{v}^{*}_{j}$, il existe une évaluation, au moins, $\bar{v}^{**}_{j}$, tel que $R_{\bar{v}^{**}_{j}} \cap \Omega = R_{\bar{v}^{*}_{j}}$. Or, en raison de ce que nous venons de prouver, il-y-a une évaluation $\bar{v}^{**}_{i}$ tel que $R_{v^{**}_{i}} \subset R_{\bar{v}^{**}_{i}}$ et, comme tous les anneaux $R_{v^{**}_{i}}$, $i=1, \ldots, m$ et $R_{\bar{v}^{**}_{j}}$, $j=1, \ldots, n$ sont conjugués entre eux, dans l'automorphismes de Ω^{*} sur Σ (T. 19, [1]), il-y-a un automorphisme, θ_{ij}, tel que $\theta_{ij}(R_{\bar{v}^{**}_{i}}) = R_{\bar{v}^{**}_{j}}$ et comme ces automorphismes transforment entre eux les anneaux $R_{v^{**}_{i}}$ sera $\theta_{ij}(R_{v^{**}_{i}}) = R_{v^{**}_{j}}$ d'où $R_{v^{*}_{j}} = R_{v^{**}_{j}} \cap \Omega \subset R_{\bar{v}^{**}_{j}} \cap \Omega = R_{\bar{v}^{*}_{j}}$.

Q.e.d.

§ 4. Extensions de évaluations composées du corps Σ à extensions finites du même.

Soient: $\Sigma = k(\xi_0, \ldots, \xi_n)$, comme dans le paragraphe antérieur, un corps des fonctions algébriques sur un corps base, k, arbitraire, mais, avec une infinité d'éléments; $\bar{\Sigma} = \Sigma(\zeta_0, \ldots, \zeta_s)$ une extension transcendente pure de Σ et $\Omega = \bar{\Sigma}(\eta_0, \ldots, \eta_m)$ une extension algébrique finite de $\bar{\Sigma}$.

Proposition 1.4. *Si $\bar{v}$ est une évaluation de $\bar{\Sigma}$ élargie d'une évaluation, v, de Σ et si v_1 est une autre évaluation de Σ composée avec v, il existe une évaluation $\bar{v}_1$ de $\bar{\Sigma}$ élargie de v_1 et composée avec $\bar{v}$.*

Démonstration. Des hypothèses il en result: $R_{v_1} \subset R_{v}$, $R_{v} = R_{\bar{v}} \cap \Sigma$, $\mathfrak{p}_{v} \subset \mathfrak{p}_{v_1}$ et que $\mathfrak{p}_{v}$ est le conducteur de R_{v_1} par rapport à R_{v}. Si nous posons $\bar{R} = R_{v_1}[\zeta_0, \ldots, \zeta_s]$ il en resulte que $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{R}\mathfrak{p}_{v} \subset \bar{R}\mathfrak{p}_{v_1} = \bar{\mathfrak{p}}_1$, et, comme les (ζ) sont algébriquement indépendants sur Σ, $\bar{\mathfrak{p}}$ et $\bar{\mathfrak{p}}_1$ sont prémiers et $\bar{\mathfrak{p}} \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{v}$, $\bar{\mathfrak{p}}_1 \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{v_1}$.

Si quelqu'un des (ς) n'appartient pas à $R_{\bar{v}}$, nous le remplacerions dans $\bar{R}$ par $\dfrac{1}{\varsigma_i}$ et alors nous pourrons toujours supposer que $\bar{R} \subseteq R_{\bar{v}}$, d'où $\bar{R}\,\mathfrak{p}_v \subseteq R_{\bar{v}}\,\mathfrak{p}_v \subseteq \mathfrak{p}_{\bar{v}}$, c'est à dire, $\bar{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}_{\bar{v}}$. Si $\bar{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{R} \supset \bar{\mathfrak{p}}$ nous prendrions un diviseur minime prémier, $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1$, de $(\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\bar{\mathfrak{p}}})$. $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1$ *est distinct de l'idéal unité*. En effet, si un diviseur prémier minime de $(\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\bar{\mathfrak{p}}})$ était l'idéal unité, il le serait aussi $(\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\bar{\mathfrak{p}}})$ et, alors, serait $1 = f_1(\varsigma)\bar{p}_1(\varsigma) + f_2(\varsigma)\bar{\bar{p}}(\varsigma)$, où $f_1, f_2, \bar{p}_1, \bar{\bar{p}} \in \bar{R}$ et $\bar{p}_1 \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_1)$, $\bar{\bar{p}} \equiv 0(\bar{\bar{\mathfrak{p}}})$, mais, comme les (ς) sont algébriquément independants sur Σ, il resulte que $f_1, f_2, \bar{p}_1, \bar{\bar{p}} \in \bar{R} \cap \Sigma = R_{v_1}$, d'où $\bar{p}_1 \in \bar{\mathfrak{p}}_1 \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{v_1}$, $\bar{\bar{p}} \in \bar{\bar{\mathfrak{p}}} \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap R_{v_1} \subseteq \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap R_v = \mathfrak{p}_v$, parceque $\bar{v}$ est une évaluation élargie de v, et comme $\mathfrak{p}_v \subset \mathfrak{p}_{v_1}$, il resulte que $\bar{p}_1$ et $\bar{\bar{p}}$ appartiennent á $\mathfrak{p}_{v_1}$, et alors $1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{v_1})$; contradiction. Nous allons prouver maintenant que $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{v_1}$. Evidemment $\mathfrak{p}_{v_1} \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 \cap R_{v_1}$; soit $\omega \in \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 \cap R_{v_1}$, alors il-y-a un élément, $\varsigma \not\equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\bar{\mathfrak{p}}})$, tel que $\omega\varsigma \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_1, \bar{\bar{\mathfrak{p}}})$, $\varsigma \in \bar{R}$, d'où $\omega\varsigma = f_1(\varsigma)\bar{p}_1 + f_2(\varsigma)\bar{\bar{p}}$, $f_1, f_2, \bar{p}_1, \bar{\bar{p}} \in \bar{R}$, $\bar{p}_1 \in \bar{\mathfrak{p}}_1$, $\bar{\bar{p}} \in \bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ et, par l'independance algébrique des (ς) sur Σ, resulte $\omega\varsigma_0 = f_{10}\bar{p}_{10} + f_{20}\bar{\bar{p}}_0$, $f_{10}, f_{20}, \bar{p}_{10}, \bar{\bar{p}}_0 \in R_{v_1}$, $\bar{p}_{10} \in \mathfrak{p}_{v_1}$, $\bar{\bar{p}}_0 \in \mathfrak{p}_{v_1}$, $\varsigma_0 \not\equiv 0(\mathfrak{p}_{v_1})$, donc, $\omega\varsigma_0 \equiv 0(\mathfrak{p}_{v_1})$ et comme $\varsigma_0 \not\equiv 0(\mathfrak{p}_{v_1})$ on obtient $\omega \equiv 0(\mathfrak{p}_{v_1})$ c'est à dire $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 \cap R_{v_1} \subseteq \mathfrak{p}_{v_1}$. De ce qui precede il resulte $\bar{\bar{\mathfrak{p}}} \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1$. Or, $\bar{\mathfrak{p}}_1 \not\subset \bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ puisque si $\bar{\mathfrak{p}}_1 \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ serait $\bar{\mathfrak{p}}_1 \cap R_{v_1} \subseteq \bar{\bar{\mathfrak{p}}} \cap R_{v_1} = (\bar{\bar{\mathfrak{p}}} \cap R_v) \cap R_{v_1} = (\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{R} \cap R_v) \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_v \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_v$, d'où $\mathfrak{p}_{v_1} \subseteq \mathfrak{p}_v$, contradiction; et alors, $\bar{\bar{\mathfrak{p}}} \subset \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1$. De cette relation et de $\bar{\bar{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{R}$ il resulte, par le leme 4 de Zariski, [8], qu'il existe une évaluation, $\bar{v}_1$, de $\bar{\Sigma}$ composée avec $\bar{v}$ tel que $\mathfrak{p}_{\bar{v}_1} \cap \bar{R} = \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1$. Soit v' l'évaluation subordonnée par $\bar{v}_1$ dans Σ, alors $R_{v'} = R_{\bar{v}_1} \cap \Sigma \subseteq R_{\bar{v}} \cap \Sigma = R_v$ et $\mathfrak{p}_{v'} = R_{v'} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}_1}$. Or. de $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 \cap R_{v_1} = \mathfrak{p}_{v_1}$ il resulte $\mathfrak{p}_{v_1} \subseteq \mathfrak{p}_{v'}$, donc; si $\omega \in \Sigma$ et $\omega \notin R_{v_1}$, $\dfrac{1}{\omega} \in \mathfrak{p}_{v_1}$ et $\dfrac{1}{\omega} \in \mathfrak{p}_{v'}$, donc $\omega \in R_{v'}$, d'où $R_{v'} \subseteq R_{v_1}$. D'ici il en découle $\mathfrak{p}_{v'} = R_{v'} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}_1} \subseteq R_{v_1} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}_1} = R_{v_1} \cap (\bar{R} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}_1}) = R_{v_1} \cap \bar{\bar{\mathfrak{p}}}_1 = \mathfrak{p}_{v_1}$, donc $v' = v_1$. Q.e.d.

Proposition 2.4. *Si* v* *est une évaluation de* Ω *élargie d'une évaluation* v *de* Σ *et si* v_1 *est une autre évaluation de* Σ *composée avec* v, *il existe une évaluation,* $\overline{v}^*_1$, *de* Ω *élargie de* v_1 *et composée avec* v*.

Démonstration. Soit $\overline{v}$ l'évaluation subordonnée par v^* dans $\overline{\Sigma}$; par la Prop. anterieure il existe une évaluation, $\overline{v}_1$, de $\overline{\Sigma}$ élargie de v_1 et composée avec $\overline{v}$. Or, par la prop. 1.3 il existe une évaluation, $\overline{v}^*_1$, de Ω élargie de $\overline{v}_1$ et composée avec v^*; l'évaluation $\overline{v}^*_1$ satisfait les conditions de l'énoncé.

Q.e.d.

§ 5. Relations entre le centre d'une évaluation et les centres des évaluations élargies d'elle même.

Nous adopterons dans ce § les hypothèses et notations du § 2, de plus nous supposerons que P est intègrement férmé et que les η_i, $i=0, \ldots, m$ dépendant intégrement de $\overline{P}$.

Notations. $P^*_1 = \overline{P}[\eta_0, \ldots, \eta_m]$, $\Omega = \overline{\Sigma}(\eta_0, \ldots, \eta_m)$; et nous appellerons V^*_1 à la variété de l'espace afin $A_{m+n+s+2}$ dont le point général a comme coordonnées non homogènes: $(\xi_0, \ldots, \xi_n, \zeta_0, \ldots, \zeta_s, \eta_0, \ldots, \eta_m)$.

Definition 1.5. Une évaluation, v, de Σ (ou de $\overline{\Sigma}$) nous l'appellerons *admissible*, s'il se verifie que min. $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n)\} \geqslant 0$ (min. $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n), v(\zeta_0), \ldots, v(\zeta_s)\} \geqslant 0$); et nous dirons qu'elle est *canonique* si min. $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n)\} = 0$, (min. $\{v(\xi_0), \ldots, v(\xi_n), v(\zeta_0), \ldots, v(\zeta_s)\} = 0$).

Lemme 1.5. *Si* v* *est une évaluation de* Ω *élargie d'une évaluation admissible de* $\overline{\Sigma}$, *le centre de* v* *dans* V^*_1 *est à distance finie.*

Démonstration. En raison des hypothèses on a

$$\eta_i^{\rho_i} + a_1^{(i)}(\zeta)\eta_i^{\rho_i - 1} + \ldots + a_{\rho_i}^{(i)}(\zeta) = 0, \quad a_j^{(i)} \in \overline{P}, \quad \begin{cases} i = 0, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, \rho_i \end{cases}$$

d'où $\rho_i v^*(\eta_i) > \min. \{ v^*(a_1^{(i)}) + (\rho_i - 1) v^*(\eta_i), \ldots, v^*(a_{\rho_i}^{(i)}) \}$,

et, en supposant que le deuxième membre est égal à

$$v^*(a_j^{(i)}) + (\rho_i - j) v^*(\eta_i) \quad \text{on a} \quad v^*(\eta_i) > \frac{1}{j} v^*(a_j^{(i)})$$

et, comme l'évaluation $\bar{v}$ est admisible,

$$v^*(a_j^{(i)}) = \bar{v}(a_j^{(i)}) \geqslant 0 \quad \text{d'où} \quad v^*(\eta_i) \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, m$$

Q.e.d.

Si v^* est une évaluation de Ω élargie d'une évaluation admissible, $\bar{v}$, de $\bar{\Sigma}$ et si $\mathfrak{p}^*$ et $\bar{\mathfrak{P}}$ sont les idéals de P^*_1 y et $\bar{P}$ qui définent leurs respectifs centres sur V^*_1 et $\bar{V}$, on démontre sans dificulté le suivant :

Lemme 2.5. $\mathfrak{p}^* \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P} \supseteq \bar{\mathfrak{P}}$ *où on a le signe d'égalité si, et seulement si,* $\mathfrak{p}^* \cap \bar{P}$ *est homogène.*

Proposition 1.5. *Les centres,* $\mathfrak{p}^*_i$, $i=1, \ldots, g$, *dans* V^*_1 *des évaluations* v^*_i, $i=1, \ldots, g$ *de* Ω *élargies d'une évaluation admissible,* $\bar{v}$, *de* $\bar{\Sigma}$, *coincident avec les idéals prémiers minimaux de* $P^*(\bar{P} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}})$.

Démonstration. Par hypothèse, P est intégrement fermé et les (ς) sont algébriquement indépendants sur Σ, d'où l'anneau $\bar{P}$ est aussi integrement fermé ; et comme P^*_1 depend intégrement de $\bar{P}$, il en resulte, en raison du lemme précédent et du Th. 9 de Krull, [2], que les centres $\mathfrak{p}^*_i$, $i=1, \ldots, g$ sont idéals prémiers minimaux de $P^*_1(\bar{P} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}})$. Il reste prouver que tout idéal prémier minime de $P^*_1(\bar{P} \cap \mathfrak{p}_{\bar{v}})$ est le centre d'une des évaluations v^*_i, $i=1, \ldots, g$.

Soit Ω^* le corps qu'on obtient par adjonction à Ω de tous les conjugués des (η_i) par rapport à $\bar{\Sigma}$: $\Omega^* = \Omega(\eta_{i_0}^{(2)}, \ldots, \eta_{i_0}^{(\alpha_0)}, \ldots, \eta_{i_m}^{(\alpha_m)})$ et $P_1^{**} = P_1^*[\eta_{i_0}^{(2)}, \ldots, \eta_{i_0}^{(\alpha_0)}, \ldots, \eta_{i_m}^{(2)}, \ldots, \eta_{i_m}^{(\alpha_m)}]$. Nous appellerons V^{**}_1 à la variété de l'espace afin definie par le point géneral $(\xi_0, \ldots, \xi_n, \varsigma_0, \ldots, \varsigma_s, \eta_0, \ldots, \eta_{i_0}^{(\alpha_0)}, \ldots, \eta_{i_m}^{(\alpha_m)})$. Soient $v_1^{**}, \ldots, v_r^{**}$ les évaluations de Ω^* élargies de l'évaluation $\bar{v}$ de $\bar{\Sigma}$. Les anneaux d'évaluation $R_{v_i^{**}}$, $i=1, \ldots, r$ sont conjugués dans les automorphismes de Ω^* sur $\bar{\Sigma}$, [1]. Comme $\bar{v}$ est une évaluation admissible, on a $P_1^{**} \subseteq R_{v_i^{**}}$, $i=1, \ldots, r$, donc, toutes les évaluation v_i^{**}, $i=1, \ldots, r$ ont leurs centres à distance finite et on peut les representer au moyen des ideals $\mathfrak{p}_i^{**}$, $i=1, \ldots, r$ de P_1^{**}. Il resulte alors que $\mathfrak{p}_i^{**} = \mathfrak{p}_{v_i^{**}} \cap P_1^{**}$, $i=1, \ldots, r$ d'où $\mathfrak{p}_i^{**} \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P}$ et, par ce que nous venons de voir, les idéals $\mathfrak{p}_i^{**}$, $i=1, \ldots, r$ sont diviseurs prémiers minimaux de $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$. Or, comme P_1^{**} dépend integrement de $\bar{P}$, il reste invariant par rapport aux automorphismes, θ_{ij}, de Ω^* sur $\bar{\Sigma}$, et il en arrive de même au sujet de l'idéal $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap P)$, d'où il resulte que les diviseurs prémièrs minimaux de cet idéal se permutent entre eux au moyen des dits automorphismes. S'il y avait un diviseur prémièr minime, $\mathfrak{p}_{r+1}^{**}$, de $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$ distinct des $\mathfrak{p}_i^{**}$, $i=1, \ldots, r$, il existeraient des éléments, ω_i^*, $i=1, \ldots, r$, de P_1^{**} tels que $\omega_i^* \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i^{**})$, $\omega_i^* = 0\,(\mathfrak{p}_{r+1}^{**})$, $i=1, \ldots, r$ et comme k a une infinité d'éléments, on pourrait déterminer les $\lambda_i \in k$, $i=1, \ldots, r$ de façon que $\omega^* = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \omega_i^* \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_j^{**})$, $j=1, \ldots, r$, et évidemment $\omega^* \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{r+1}^{**})$. Soient $\omega^{*(2)}, \ldots, \omega^{*(\nu)}$ les éléments conjugués de ω^* par rapport à $\bar{\Sigma}$; comme $\omega^* \in P_1^{**}$ tous appartiennet à P_1^{**}, d'où $N(\omega^*) = \omega^* \ldots \omega^{*(\nu)} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{r+1}^{**})$ et comme $N(\omega^*) \in \bar{P}$ et $\mathfrak{p}_{r+1}^{**}$ est diviseur prémier minime de $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$, il resulte que $N(\omega^*) \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$, d'où $\omega^*, \ldots, \omega^{*(\nu)} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i^{**})$, $i=1, \ldots, r$ donc $\omega^{*(\alpha)} \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i^{**})$, $1 \leqslant \alpha \leqslant r$; et, si θ_α est l'automorphisme qui transforme $\omega^{*(\alpha)}$ dans ω^*, comme $\theta_\alpha(\mathfrak{p}_i^{**}) = \mathfrak{p}_j^{**}$, $1 \leqslant j \leqslant r$ sera $\omega^* \equiv 0\,(\mathfrak{p}_j^{**})$, $1 \leqslant j \leqslant r$; contradiction. Donc, *tous les idéals prémiers minimes de* $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$ *sont des centres d'évaluations* v_i^{**}.

Or, si $\mathfrak{p}_*^*$ est un idéal prémièr minime de $P_1^*(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap P)$ on a $\mathfrak{p}_*^* \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P}$. Soit w^* une évaluation de Ω dont le centre sur V_1^* soit $\mathfrak{p}_*^*$ et $\bar{w}$ l'évaluation subordonnée dans $\bar{\Sigma}$; alors, $\mathfrak{p}_*^* \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{w}} \cap P$ donc, $\mathfrak{p}_{\bar{w}} \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P}$. Comme $P_1^* \subseteq R_{w^*}$ il resulte que si w^{**} est une extension à Ω^* de la évaluation w^*, $P_1^{**} \subseteq R_{w^{**}}$, et le centre, $\mathfrak{p}^{**}$, de w^{**} dans V_1^{**} sera à distance finite et viendra defini par un idéal $\mathfrak{p}^{**}$, de P_1^{**}; il resulte, alors, que $\mathfrak{p}^{**} \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{w}} \cap \bar{P}$, d'où $\mathfrak{p}^{**} \cap \bar{P} = \mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P}$ donc $\mathfrak{p}^{**}$ est un diviseur prémier minime de $P_1^{**}(\mathfrak{p}_{\bar{v}} \cap \bar{P})$ et, par ce que nous venons de prouver, il est le centre d'une évaluation, v_i^{**}, qui est extension de l'évaluation $\bar{v}$ et, comme $\mathfrak{p}_*^* = \mathfrak{p}^{**} \cap P_1^*$ cet idéal est le centre de l'évaluation subordonnée par v_i^{**} dans Ω, laquelle est une extension de l'évaluation $\bar{v}$.

Q. e. d.

Corollaire. *Si* $\bar{v}$ *est une évaluation de* $\bar{\Sigma}$ *dont le centre dans le cone* $\bar{V}_A$ *vient defini par l'idéal* $\bar{\mathfrak{P}}$ *et si* v_i^*, $i=1, \ldots, r$ *sont leurs évaluations élargies à* Ω, *on vérifie que les centres* $\bar{\mathfrak{p}}_i^*$, $i=1, \ldots, r$ *de ces évaluations sur* V_1^* *coincident avec les idéals prémiers minimes de* $P_1^* \bar{\mathfrak{P}}$.

Soit W une sous-variété irreductible de V definie par l'ideal homogène $\mathfrak{P}$ de P ; $\bar{W}_A$ la sous-variété du cone $\bar{V}_A$ définie par $\bar{P}\,\mathfrak{P}=\bar{\mathfrak{P}}$; $\bar{v}$ une évaluation de $\bar{\Sigma}$ avec centre $\bar{W}_A$ dans $\bar{V}_A$; v l'évaluation subordonnée par $\bar{v}$ dans Σ, dont le centre dans V est W ; v' une évaluation admissible, arbitraire, de Σ avec son centre dans W ; $\bar{v}'$ une évaluation admissible de $\bar{\Sigma}$ élargie de v' ; v_i^*, $i=1, \ldots, g$, les évaluation de Ω élargies de $\bar{v}$; $\mathfrak{p}_i^*$, $i=1, \ldots, g$ leurs respectifs centres dans V_1^*; $v_i^{*\prime}$, $i=1, \ldots, h$ les évaluations de Ω élargies de $\bar{v}'$ et $\mathfrak{p}_i^*$, $i=1, \ldots, h$ leurs respectifs centres dans V_1^*, alors on a la suivante :

Proposition 2.5. *Les ideals* $\mathfrak{p}_i^{*\prime}$, $i=1, \ldots, h$ *sont diviseurs des ideals* $\mathfrak{p}_i^*$, $i=1, \ldots, g$.

Démonstration. Par le leme 2.5 on a $\bar{\mathfrak{P}} \subseteq \mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap \bar{P}$ d'où $P_1^* \bar{\mathfrak{P}} \subseteq P_1^*(\mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap \bar{P})$. Or, par la Prop. anterieure et son corollaire, on a que les ideals $\mathfrak{p}_i^*$, $i=1, \ldots, g$ coincident avec les diviseurs prémiers minimes de $P_1^* \bar{\mathfrak{P}}$ et les ideals $\mathfrak{p}_i^{*\prime}$, $i=1, \ldots, h$ avec les diviseurs prémiers minimes de $P_1^*(\mathfrak{p}_{\bar{v}'} \cap \bar{P})$, d'où l'on tire, de façon bien connue, notre proposition.

Q. e. d.

§ 6. Coordonnées et idéals bihomogènes.

Soit $\mathfrak{P}=k[x_0, \ldots, x_n ; y_0, \ldots, y_m]$ l'anneau des polynômes dans les indéterminées $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(y_0, \ldots, y_m)$ sur un corps de constantes k, arbitraire et avec une infinité d'éléments et $P=(f_{\alpha_1\beta_1}, \ldots, f_{\alpha_n\beta_n})$ un ideal prémier engendrée par des formes, $f_{\alpha_i\beta_i}$, $i=1, \ldots, n$, homogènes par rapport aux (x) et aux (y) ; auxqueles on appelle bihomogènes. Si $x_i=\xi_i(P)$, $y_j=\eta_j(P)$, $i=0, \ldots, n$ $j=0, \ldots, m$

aux $(\xi_0, \ldots, \xi_n ; \eta_0, \ldots, \eta_m)$ nous les appellerons coordonnées du point général de la variété algébrique double, $\mathfrak{V}$, definie dans l'espace projectif double par l'ideal P.

Notations. $P^* = k[\xi_0, \ldots, \xi_n ; \eta_0, \ldots, \eta_m] \cong \mathfrak{P}/P$;

$\Omega = k(\xi_0, \ldots, \xi_n ; \eta_0, \ldots, \eta_m)$; $\xi'_i = \dfrac{\xi_i}{\xi_0}$, $\eta'_j = \dfrac{\eta_j}{\eta_0}$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$;

$\mathfrak{o}^* = k[\xi'_1, \ldots, \xi'_n ; \eta'_1, \ldots, \eta'_m]$, $K^* = k(\xi'_1, \ldots, \xi'_n, \eta'_1, \ldots, \eta'_m)$

Proposition 1.6. *Si λ et μ sont deux éléments non nuls de* k, *la correspondance* $\tau_{\lambda,\mu} : \xi_i \to \lambda \xi_i$, $\eta_j \to \mu \eta_j$, $i=0, \ldots, n$, $j=0, \ldots, m$, *est un automorphisme de* P^* *et donc de* Ω.

Demonstration. Evidemment $\tau_{\lambda,\mu}$ est un homomorphisme. Soit $f(\xi ; \eta)$ un élément de P^* tel que $\tau_{\lambda,\mu}(f(\xi ; \eta)) = f(\lambda \xi ; \mu \eta) = 0$, d'où il resulte que $f(\lambda x ; \mu y) \equiv 0 \ (P)$ et comme l'ideal P est bihomogène tous les composants bihomogènes de $f(\lambda x ; \mu y)$ appartiendront à P. Si $f_{\alpha,\beta}(\lambda x ; \mu y) = \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} f_{\alpha\beta}(x ; y)$ est une quelconque d'entre elles, il resulte $\lambda^{\alpha} \mu^{\beta} f_{\alpha\beta}(x ; y) \equiv 0 \ (P)$, d'où comme $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $f_{\alpha,\beta}(x ; y) = 0 (P)$, donc, $f_{\alpha,\beta}(\xi ; \eta) = 0$ et alors $f(\xi ; \eta) = 0$.

Q. e. d.

Corollaire. *Si τ_1, τ_2 sont deux transcendentes sur Ω, on a que*

$$k[\tau_1 \xi_0, \ldots, \tau_1 \xi_n ; \tau_2 \xi_0, \ldots, \tau_2 \eta_m] \cong P^*$$

Définition. Aux anneaux et corps qui jouissent de la proprieté de la proposition anterieure nous les appellerons *bihomogènes*. Nous appellerons *ideal bihomogène*, d'un anneau bihomogène P^*, à tout ideal tel que si $f(\xi ; \eta)$ l'appartient, tous leurs composants bihomogènes l'appartient aussi.

Lemme 1.6. *Si un ideal* I^* *de* P^* *admet tous les automorphismes* $\tau_{\lambda,\mu}$, *c'est à dire, si* $\tau_{\lambda,\mu}(I^*) \subseteq I^*$ *pour tout λ et tout μ de* k *pas nules, l'ideal* I^* *est bihomogène.*

Démonstration. Soit $f(\xi ; \eta)$ un élément arbitraire de I^*: $f(\xi ; \eta) = \sum_{i=\alpha, j=\beta}^{i=\mu, j=\nu} f_{ij}(\xi ; \eta)$, où f_{ij} sont formes bihomogènes des degrés i, j, par rapport des (ξ) et (η), quelques tèrmes de la somme peuvent manquer. Par l'hypotèse on a $\Sigma \lambda^i \mu^j f_{ij}(\xi ; \eta) \equiv 0$ (I^*) pour toute valeur non nulle de λ et μ. Mais, comme k a une infinité d'éléments, on peut déterminer un systhème de valeurs des mêmes tels que le déterminant formé par les coefficients de toutes les relations qui en resultent, soit distinct de zéro et alors tous les composants bihomogènes de $f(\xi ; \eta)$ appartiendront à I^*.

Q. e. d.

Comme dans le Th. 2 [8] de Zariski on prouve ce qui suit:

Lemme 2.6. *Tout idéal bihomogène on peut le décomposer en compossants primaires aussi bihomogènes.*

Mais on peut suivre la démonstration suivante, plus briève qui nous a été comuniqué par le prof. Zariski:

Démonstration. Si $\mathfrak{p}$ est l'ideal prémier correspondant à l'ideal primaire $\mathfrak{q}$ de P^*, et si $\mathfrak{p}^*$ et $\mathfrak{q}^*$ sont les ideals de P^* engendrés par toutes les formes bihomogènes de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ respectivement, on a que $\mathfrak{p}^*$ est l'ideal prémier de l'ideal primaire $\mathfrak{q}^*$. Soit maintenant I^* un ideal bihomogène arbitraire de P^* et $I^* = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s$ une décomposition normale du même; $\mathfrak{q}^*_i$ $i=1, \dots, s$ les ideals engendrés par les formes bihomogènes des ideals $\mathfrak{q}_i$, $i=1, \dots, s$. Alors, comme I^* est bihomogène $I^* \subseteq \mathfrak{q}^*_i$, $i=1, \dots, s$ d'où $I^* \subseteq \mathfrak{q}^*_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}^*_s \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_s = I^*$.

Q. e. d.

Etant donné un ideal arbitraire de l'anneau $\mathfrak{o}^*$ à l'ideal de P^* engendré par toutes les formes bihomogènes qui resultent de faire bihomogènes tous les éléments de celle-là, on l'appelle l'ideal bihomogène correspondant à l'ideal donné. Les relations ideal-théoretiques entre cettes anneaux on peut l'établir d'une façon tout à fait analogue à celle de Zariski dans [8]. En effet, soit

$$\bar{\mathfrak{o}}^* = k(\xi_0, \eta_0)[\xi'_1, \dots, \xi'_n; \eta'_1, \dots, \eta'_m] = k(\xi_0, \eta_0)[\xi_0, \dots, \xi_n; \eta_0, \dots, \eta_m]$$

d'où $\bar{\mathfrak{o}}^* = P^*_{k(\xi_0, \eta_0)}$ on a le suivant:

Lemme 3.6. *Entre les anneaux $\mathfrak{o}^*$ et $\bar{\mathfrak{o}}^*$ on a les rélations suivantes:*

a) $\bar{\mathfrak{o}}^* \supset \mathfrak{o}^*$.

b) *Tout élément de $\bar{\mathfrak{o}}^*$ peut se mettre dans la forme*

$$\omega^* = \frac{1}{g(\xi_0 \eta_0)} (\omega_{nm} \xi_0^n \eta_0^m + \ldots + \omega_{\alpha\beta} \xi_0^\alpha \eta_0^\beta + \ldots + \omega_{00})$$

où les ω_{ij} appartiennent à $\mathfrak{o}^*$. La condition necessaire et suffisante pour qu'un ideal, $\bar{\mathfrak{u}}^*$, de $\bar{\mathfrak{o}}^*$ soit extension d'un ideal $\mathfrak{u}^*$ de $\mathfrak{o}^*$ est que tout élément de $\bar{\mathfrak{u}}^*$, écrit dans la forme anterieure, soit tel que toutes les ω_{ij} appartiennent à $\bar{\mathfrak{u}}^*$.

c) $\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^* \cap \mathfrak{o}^* = \mathfrak{u}^*$.

d) *Si* $\mathfrak{u}^*_1 \cap \mathfrak{u}^*_2 = \mathfrak{u}^*_3$ *on a que* $\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_1 \cap \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_2 = \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_3$.

e) *Si $\mathfrak{p}^*$ est prémier en $\mathfrak{o}^*$ il l'est aussi $\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{p}^*$.*

f) *Si $\mathfrak{q}^*$ est primaire dans $\mathfrak{o}^*$ et $\mathfrak{p}^*$ il est son ideal prémier corréspondant, d'analogues relations sont vrais pour $\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{q}^*$ et $\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{p}^*$.*

g) $\bar{\mathfrak{o}}^* (\mathfrak{u}^*_1, \mathfrak{u}^*_2) = (\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_1, \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_2)$.

h) $\bar{\mathfrak{o}}^* (\mathfrak{u}^*_1 \cdot \mathfrak{u}^*_2) = (\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_1) \cdot (\bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_2)$.

i) $\bar{\mathfrak{o}}^* (\mathfrak{u}^*_1 : \mathfrak{u}^*_2) = \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_1 : \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*_2$.

Démonstration. En raison du corolaire de la prop. 1.6, ξ_0 est algébriquement independante sur K^* et η_0 il l'est sur $K^*(\xi_0)$. En mettant $\mathfrak{o}_1^* = k(\xi_0)[\mathfrak{o}^*]$, il resulte que $\bar{\mathfrak{o}}^* = k(\eta_0)[\mathfrak{o}^*_1]$. On obtient maintenant la démonstration par application succesive des propositions analogues démonstrées par Zariski [8], en prémier lieu aux anneaux $\mathfrak{o}^*$, $\mathfrak{o}^*_1$ et aprés aux anneaux $\mathfrak{o}^*_1$ $\bar{\mathfrak{o}}^*$.

Q. e. d.

A tout idéal $\mathfrak{u}^*$ de $\mathfrak{o}^*$ lui correspond un idéal $\bar{\mathfrak{u}}^* = \bar{\mathfrak{o}}^* \mathfrak{u}^*$ de $\mathfrak{o}^*$ et à celui-ci un idéal, $\mathfrak{u}^{**} = \bar{\mathfrak{u}}^* \cap P^*$, de P^*. Nous appellerons C et C^* à l'ensambles de tous les ideals de $\bar{\mathfrak{o}}^*$ et de P^*, respectivement, obtenus de cette manière quand $\mathfrak{u}^*$ parcourt tous les idéals de $\mathfrak{o}^*$.

Proposition 2.6. *La correspondance entre les idéals de $\mathfrak{o}^*$ et ceux de la classe C^* de P^* est biunivoque et jouit des propriétés suivantes:*

a) *La condition necessaire et suffisante pour que l'idéal* $\mathfrak{u}^*$

de P^* *appartienne à la classe* C^* *est qu'il soit homogène et que* ξ_0 *et* η_0 *n'appartiennent pas à aucun diviseur prémier minime de lui même.*

b) *Si* $\mathfrak{u}=\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_r$ *et si* $\mathfrak{p}_i$, $i=1, \ldots, r$ *sont les idéals prémiers correspondants et si* $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{q}_i^*$, $\mathfrak{p}_i^*$, $i=1, \ldots, r$ *sont les idéals de* C^* *correspondants aux precedentes, on vérifie que* $\mathfrak{u}^*=\mathfrak{q}_1^* \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^*$ *et que* $\mathfrak{p}_i^*$ *est l'idéal prémier de* $\mathfrak{q}_i^*$, $i=1, \ldots, r$. *La reciproque est aussi certain si les idéals* $\mathfrak{u}^*$, $\mathfrak{q}_i^*$, $\mathfrak{p}_i^*$, *sont dans la condition* a).

c) *Si* $\mathfrak{u}_1^*, \mathfrak{u}_2^*, \mathfrak{u}_3^*$, *sont les idéals de* C^* *correspondants aux idéals* $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$, *de* $\mathfrak{o}^*$ *respectivement, et si* $\mathfrak{u}_3=(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$, $\mathfrak{u}_3=\mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{u}_2$ *ou* $\mathfrak{u}_3=\mathfrak{u}_1 : \mathfrak{u}_2$ *on a* $\mathfrak{u}_3^*=(\mathfrak{u}_1^*, \mathfrak{u}_2^*)$, $\mathfrak{u}_3^*=\mathfrak{u}_1^* \cdot \mathfrak{u}_2^*$ *ou* $\mathfrak{u}_3^*=\mathfrak{u}_2^* : \mathfrak{u}_2^*$ *respectivement; et reciproquement, si on satisfent les conditions de* a).

Par le lemme anterieur, la démonstration de cette Prop. coincide avec celle donnée par Zariski dans le cas des variétés ordinaires, [8].

§ 7. Evaluations des corps bihomogènes.

Dans ce qui suit nous adoptérons les notations et hipothèses des §§ 2 et 6.

Définition 1.7. Soit v^* une évaluation de Ω;

$$l(\xi)=l_0\,\xi_0+l_1\,\xi_1+\ldots+l_n\,\xi_n,\quad l_i \in k,\ i=0, \ldots, n$$

et $$l'(\eta)=l'_0\,\eta_0+\ldots+l'_m\,\eta_m,\quad l'_i \in k,\quad i=0, \ldots, m$$

sont des formes linéaires en les (ξ) et les (η), respectivement, de valeur minime par rapport aux valeurs de toutes les formes linéaires dans les (ξ) et dans les (η) respectivement. Nous appellerons *centre* de v^* dans $\mathfrak{V}$ à la sous-variété définie par l'idéal, $\mathfrak{P}^*$, engendré par toutes les formes bihomogènes $f_{\alpha,\beta}(\xi, \eta)$ de P^* tels qui $v^*\left(\dfrac{f_{\alpha\beta}}{l^\alpha\, l'^\beta}\right)>0$.

A l'idéal $(\xi_0, \ldots, \xi_n; \eta_0, \ldots, \eta_m)$ et à tous leurs primaires on les appelle *irrevlevants* de P^*.

Proposition 1.7. *Le centre,* $\mathfrak{P}^*$, *dans* $\mathfrak{V}$ *de l'évaluation* v^* *ne dépend pas des formes de valeur minime choisies; l'idéal* $\mathfrak{P}^*$ *est prémier bihomogène, distinct de l'irrelevant et, si l'évaluation subordonnée par* v^* *dans* K^* *n'est pas triviale, differente de l'idéal zéro.*

Démonstration. Soient $l(\xi)$ et $l^*(\xi)$ deux formes de valeur minime dans les (ξ) et $l'(\eta)$, $l^{*\prime}(\eta)$ deux autres formes linéaires de valeur minime dans les (η); si $v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{l^{\alpha}\, l'^{\beta}}\right)>0$ on a $v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{l^{*\alpha}\, l^{*\prime\beta}}\right)=$ $v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{l^{\alpha}\, l'^{\beta}}\right)+v^*\left(\frac{l^{\alpha}\, l'^{\beta}}{l^{*\alpha}\, l^{*\prime\beta}}\right)=v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{l^{\alpha}\, l'^{\beta}}\right)>0$ et réciproquement. Il n-y-a pas de difficulté pour la démonstration que $\mathfrak{P}^*$ est un idéal prémier et bihomogène. De $v^*(l(\xi))\geqslant \min.\{v^*(\xi_0), ..., v^*(\xi_n)\}$ il resulte, que si $\min.\{v^*(\xi_0), ..., v^*(\xi_n)\}=v^*(\xi_0)$, on peut le prendre comme forme linéaire de valeur minime dans les (ξ) la forme ξ_0; pareillement, si $\min.\{v^*(\eta_0), ..., v^*(\eta_m)\}=v^*(\eta_0)$, on peut le prendre comme forme linéaire de valeur minime dans les (η) l'élément η_0. Alors on a $\xi_0, \eta_0 \not\equiv 0\ (\mathfrak{P}^*)$ d'où $\mathfrak{P}$ n'est pas l'irrelevant. Si ξ_0 et η_0 sont de valeur minime et $\mathfrak{P}^*=(0)$ serait $v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{\xi_0^{\alpha}\,\eta_0^{\beta}}\right)=0$ pour tout $f_{\alpha,\beta}$, d'où l'évaluation subordonnée par v^* dans K^* serait triviale. Reciproquement, si l'évaluation subordonnée dans K^* est triviale serait $v^*\left(\frac{f_{\alpha\beta}}{\xi_0^{\alpha}\,\eta_0^{\beta}}\right)=0$ par toute forme bihomogène de P^*, donc $\mathfrak{P}^*=(0)$.

Q. e. d.

Lemme 1.7. *Si* v^* *est une évaluation de* Ω *qui subordonne l'évaluation* v *dans* Σ *et si* $\mathfrak{P}^*$ *et* $\mathfrak{P}$ *sont leurs respectifs centres dans* $\mathfrak{V}$ *et* V *respectivement, on verifie* $\mathfrak{P}^* \cap P=\mathfrak{P}$.

Lemme 2.7. *Si* $\mathfrak{P}$ *est un idéal homogène de* P, *l'idéal* $P^*\mathfrak{P}$ *et tous leurs diviseurs prémiers minimes sont bihomogènes.*

Démonstration. Si $f(\xi;\eta)$ est un élément arbitraire de $P^*\mathfrak{P}$ sera $f(\xi;\eta)=\sum_{i=1}^{s} f_i(\xi,\eta)\,\varphi_i(\xi)$, $f_i\in P^*$, $\varphi_i(\xi)\equiv 0\,(\mathfrak{P})$, $i=1,...,s$ et si λ et μ sont deux éléments, pas nules, quelconques de k, comme $\mathfrak{P}$ est homogène, sera $\varphi_i(\lambda\xi)\equiv 0\,(\mathfrak{P})$ d'où $\tau_{\lambda,\mu}(f)=\sum_{i=1}^{s} f_i(\lambda\xi,\mu\eta)\cdot\varphi_i(\lambda\xi)\equiv 0\,(P^*\mathfrak{P})$ et, par le L. 1.6, l'idéal $P^*\mathfrak{P}$ est bihomogène. La seconde partie du lemme est maintenant une consequence du L. 2.6.

Proposition 2.7. *Si* v *est une évaluation arbitraire de* Σ *avec centre* $\mathfrak{P}$ *dans* V *et si* v* *est une extension á* Ω *de celle-là, le centre* $\mathfrak{P}^*$ *de* v* *dans* $\mathfrak{B}$ *git sur* $\mathfrak{P}$ *et divise un, au moins, des idéals minimes prémiers de* $P^* \mathfrak{P}$ *qui gisent sur* $\mathfrak{P}$.

Démonstration. En raison du L. 1.7, l'idéal $\mathfrak{P}^*$ git sur $\mathfrak{P}$, d'où $P^* \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$ et alors, $\mathfrak{P}^*$ divise un, $\mathfrak{P}_i^*$, au moins, des idéals prémiers minimes de $P^*\mathfrak{P}$, c'est à dire, $\mathfrak{P}_i^* \subseteq \mathfrak{P}^*$ d'où $\mathfrak{P}_i^* \cap P = \mathfrak{P}$.

Q. e. d.

Définition 2.7. Si W* est une sous-variété irreductible de $\mathfrak{B}$ définie par l'idéal $\mathfrak{P}^*$ il s'appelle *anneau de quotients*, $Q(W^*) = P^*_{\mathfrak{P}^*}$, par rapport à la sous-variété mentionée, l'ensamble de tous les quotients, $\dfrac{f_{\alpha\beta}(\xi; \eta)}{g_{\alpha\beta}(\xi; \eta)}$, de formes bihomogènes des mêmes dégrés par rapport aux (ξ) et aux (η) et telles que $g_{\alpha\beta} \not\equiv 0 \, (\mathfrak{P}^*)$.

La même démonstration du Th. 3 de Zariski, [8], est valable pour la suivante:

Proposition 3.7. *Une condition necessaire et suffisante pour qu'une sous-variété irreductible,* W*, *de* $\mathfrak{B}$ *soit le centre d'une évaluation* v* *de* Ω *c'est qu'il se produise une quelconque des conditions suivantes:*

1) $Q(W^*) \subseteq R_{v^*}$ *et les non unités de* $Q(W^*)$ *sont non unités de* R_{v^*}.

2) $Q(W^*) \subseteq R_{v^*}$ *et* W* *est la plus grande sous-variété de* $\mathfrak{B}$ *jouissant de cette proprieté.*

Définition 3.7. Nous appellerons dimension d'une sous-variété irreductible, W*, de $\mathfrak{B}$ et de son idéal bihomogène, $\mathfrak{P}^*$, correspondant, à la dimension de ce dernier idéal consideré comme idéal ordinaire diminué en deux unités. Nous appellerons $q+2$ au degré de transcendence de Ω sur k.

Proposition 4.7. *Si* W* *est une sous-variété irreductible propre de* $\mathfrak{B}$ *de dimension* d *il existent des évaluations de* Ω, *avec centre dans* W*, *de dimension* ρ, *étant* ρ *un entièr rationnel tel que* $d \leqslant \rho \leqslant q+1$.

Démonstration. Avec l'expression *propre* de l'énoncé on exprime que l'idéal prémier et bihomogène, $\mathfrak{P}^*$, correspondant à W* ne git pas sur les idéals irrelevants de P et $P' = k[\eta_0, \ldots, \eta_m]$.

Il existe, pourtant, une (ξ) et une (η), p. e. ξ_0 et η_0, tels que $\xi_0 \cdot \eta_0 \neq 0\,(\mathfrak{P}^*)$. Par la Prop. 2.6, à $\mathfrak{P}^*$ lui correspond un idéal non homogène $\mathfrak{p}^*$, de $\mathfrak{o}^*$. Evidemment dim. $(\mathfrak{p}^*) = d$ et le degré de transcendance de K^* sur k est égal à q. Par le Th. 4 de Zariski, [8], il existe des évaluations, $v^{*\prime}$, de K^*, de dimension arbitraire, ρ', etant ρ' un entier qui satisfait les relations $d \leqslant \rho' \leqslant q-1$, et tel que $\mathfrak{p}_{v^{*\prime}} \cap \mathfrak{o}^* = \mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{o}^* \subseteq R_{v^{*\prime}}$. Or, come Ω est une extension transcendante pure de K^*: $\Omega = K^*(\xi_0, \eta_0)$ (Cor. de la Prop. 1.6), il resulte, par la Prop. 1.2, qu'il existe des extensions à Ω de $v^{*\prime}$ de dimension ρ étant ρ un entier tel que $\rho' \leqslant \rho \leqslant q+1$. Soit v^* une de ces évaluations de dimension ρ et soit $\mathfrak{P}^{**}$ son centre sur $\mathfrak{B}$. Comme v^* est une extension de $v^{*\prime}$ on verifie que

$$v^*\left(\frac{\xi_i}{\xi_0}\right) = v^{*\prime}\left(\frac{\xi_i}{\xi_0}\right) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v^*\left(\frac{\eta_j}{\eta_0}\right) = v^{*\prime}\left(\frac{\eta_j}{\eta_0}\right) \geqslant 0$$

donc $\qquad v^*(\xi_0) = \min.\{v^*(\xi_0), \ldots, v^*(\xi_n)\}$

et $\qquad v^*(\eta_0) = \min.\{v^*(\eta_0), \ldots, v^*(\eta_m)\}$

d'où il resulte que ξ_0 est une forme lineaire de valeur minime par rapport des (ξ) et η_0 l'est par rapport des (η). Si $f_{\alpha,\beta}(\xi, \eta)$ est une forme bihomogène arbitraire de $\mathfrak{P}^*$, on a $v^*\left(\dfrac{f_{\alpha,\beta}}{\xi_0^{\alpha}\eta_0^{\beta}}\right) > 0$, donc, $v^{*\prime}\left(f\left(\dfrac{\xi_i}{\xi_0}, \dfrac{\eta_j}{\eta_0}\right)\right) > 0$ et alors $f(\xi;\eta) \equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$. Réciproquement, si $f_{\alpha,\beta}(\xi;\eta)$ est une forme bihomogène arbitraire de $\mathfrak{P}^*$ sera $f_{\alpha,\beta}\left(\dfrac{\xi_i}{\xi_0}, \dfrac{\eta_j}{\eta_0}\right) \equiv 0\,(\mathfrak{p}^*)$ et $v^{*\prime}\left(f_{\alpha,\beta}\left(\dfrac{\xi_i}{\xi_0}, \dfrac{\eta_j}{\eta_0}\right)\right) > 0$ d'où $v^*\left(\dfrac{f_{\alpha\beta}(\xi, \eta)}{\xi_0^{\alpha}\eta_0^{\beta}}\right) > 0$ et $f_{\alpha,\beta} \equiv 0\,(\mathfrak{P}^{**})$ donc $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}^{**}$.

Q. e. d.

DEUXIÈME PARTIE

CORRESPONDANCES ALGÉBRIQUES

§ 8. Définition des correspondances algébriques

Dans ce qui suit, nous admettrons les hypothèses et les notations des à part 6 et 2. A la variété irreductible, définie par le point général $(\eta_0, \ldots, \eta_m)$ nous la représenterons par V′ et nous emploierons en outre les notations suivantes:

Notations 1.8.

$$\Sigma' = k(\eta_0, \ldots, \eta_m), \quad P' = k[\eta_0, \ldots, \eta_m],$$

$$K' = k\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}, \ldots, \frac{\eta_m}{\eta_0}\right), \quad \mathfrak{o}' = k\left[\frac{\eta_1}{\eta_0}, \ldots, \frac{\eta_m}{\eta_0}\right].$$

Nous appellerons $r+1$ le dégré de transcendance de Σ sur k; $s+1$ le dégré de transcendance de Σ' sur k; $a+1$ et $b+1$ aux degrés de transcendance de Ω sur Σ et Σ' respectivement. Alors on a $r+a+2=s+b+2=q+2$.

Définition 1.8. A la variété algébrique double $\mathfrak{B}$ on l'appelle, [5], *variété de définition de la correspondance algébrique* T entre les variétés V et V′, auxquelles on nome *variété originale* et *variété imâge*, respectivement. Deux sousvariétés irreductibles, W et W′, de V et V′ respectivement nous dirons qu'elles sont *homologues* dans la correspondance algébrique T, et nous écrirons W′=T(W), quand il existe une évaluation, v^*, de Ω telle que les évaluations v et v', subordonnées par elle dans Σ et Σ', aient comme centres dans V et V′ aux sous-variétés W et W′, respectivement.

Théorème 1.8. *Toute sous-variété irreductible,* W, *de* V *a, au moins, une sous-variété homologue en* T.

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}$ l'idéal prémier et homogène de P correspondant à W et v une des évaluations de Σ avec le centre en W. En raison de ce que nous venons de voir dans la prémièr partie, il existe une infinité d'évalutions de Ω qui sont des extensions de l'évaluation v ; soit v^* une de celles-là et v' l'évaluation subordonnée par v^* dans Σ'. Le centre, W', de v' dans V' (le quel peut être toute la variété V', si v' est l'évaluation triviale de Σ'), est une sous-variété homologue de W.

Q. e. d.

Soient : $\mathfrak{P}$ l'idéal prémier et homogène de P qui définit une sous-variété, W, de V.: $\mathfrak{P}^*_i$, $i=1, ..., g$, les idéals prémières minimes de $P^* \mathfrak{P}$ qui gissent sur $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}'_i = \mathfrak{P}^*_i \cap P'$, $i=1, ..., g$ et W'_i, $i=1, ..., g$, les sous-variétés de V' correspondantes à ces dérniers idéals. Alors on a le suivant :

Théorème 2.8.

a) $W'_i = T(W)$, $i=1, ..., g$.

b) *Si* $W' = T(W)$ *il existe un* i, *au moins, tel que* $1 \leqq i \leqq g$ *et* $W' \subseteq W'_i$.

Démonstration. a) Des hypothèses il résulte qu'il existe une (ξ) et une (η), p. e. ξ_0 et η_0, tels que $\xi_0, \eta_0 \equiv\!\!|\!\!\equiv 0\, (\mathfrak{P}^*_i)$. Soit v_i^* une évaluation de Ω avec centre $\mathfrak{P}^*_i$ dans $\mathfrak{B}$ (Prop. 4.7) et soient v_i et v'_i leurs évaluations subordonnées dans Σ et Σ', respectivement. Par le Lemme 1.7, les centres de v_i et de v'_i sont W et W'_i, respectivement.

b) Soient : v^* l'évaluation de Ω qui subordonne dans Σ et Σ' les évaluations v et v' avec centres W et W' respectivement ; $\mathfrak{P}^*$ et $\mathfrak{P}'$ les idéals de P^* et P' qui définent les centres de v^* et v' respectivement. Par le Lemme 1.7 on a $\mathfrak{P}^* \cap P = \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^* \cap P' = \mathfrak{P}'$. De la prémière de celles-ci on a $\mathfrak{P}^* \supseteq P^* \mathfrak{P}$ d'où $\mathfrak{P}^* \supseteq \mathfrak{P}^{**}$, ou $\mathfrak{P}^{**}$ est un diviseur prémièr minime de $P^* \mathfrak{P}$. De la dérnière relation on en déduit que $\mathfrak{P}^{**}$ git sur $\mathfrak{P}$, et alors $\mathfrak{P}^{**} = \mathfrak{P}_i^*$, $1 < i < g$, donc $\mathfrak{P}' \supseteq \mathfrak{P}'_i$

Q. e. d.

Définition 2.8. A la sous-variété $W'_1 + ... + W'_g$ (en général réductible) définie dans le théorème precedent nous l'appelerons *variété transformée*, ou *imâge* de la sous-variété W de V, et nous la representerons par $T[W]$.

Théorème 3.8. Si $W_1 \subset W \subset V$ *et* $W' = T(W)$ *il existe une sous-variété* W' *de* V' *telle que* $W'_1 = T(W_1)$ *et* $W'_1 \subseteq W'$.

Démonstration. Soient : v^* l'évaluation de Ω au moyen de laquelle on définit W' ; v et v' les évaluations subordonnées par

v^* dans Σ et Σ' respectivement. De la rélation $W_1 \subset W$, il résulte, par le L. 4, [8], qu'il existe une évaluation, v_1, de Σ avec centre W_1 et composée avec v, et, par la Prop. 2.4, il existe une évaluation, v^*_1, de Ω composée avec v^* et élargie de v_1. Soit v'_1 l'évaluation subordonnée par v^*_1 dans Σ'. Alors on aura $R_{v'} = R_{v^*} \cap \Sigma'$, $R_{v'_1} = R_{v_1^*} \cap \Sigma'$ et $R_{v_1^*} \subset R_{v^*}$, d'où $R_{v'_1} \subseteq R_{v'}$. Soit W'_1 le centre de v'_1 dans V'. Si $R_{v'_1} = R_{v'}$ sera $W'_1 = W'$ et si $R_{v'} \subset R_{v'_1}$, v'_1 sera composée avec v' (Prop. 1.1) et, par le Lemme 2, [8], on aura $W'_1 \subseteq W'$.

Q. e. d.

Théorème 4.8. Si T_A est une correspondance algébrique irreductible entre les variétés V et V'; T_B et $T_{B'}$ les correspondances birrationnelles entre V et V' et leurs respectives variétés normales dérivées (ou localement normales, suivant les cas) $\bar{V}$ et $\bar{V}'$; la correspondance T_A subordonne entre les variétés $\bar{V}$ et $\bar{V}'$ une correspondance algébrique irreductible, $T_{\bar{A}}$, tel que

$$T_A = T_{B'}^{-1} T_{\bar{A}} T_B .$$

Démonstration. Soient $(\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p)$ et $(\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q)$ les points généraux de $\bar{V}$ et $\bar{V}'$ respectivement, et posons: $\bar{P} = k[\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p]$,

$$\bar{P}' = k[\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q], \quad \bar{P}^* = k[\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p; \bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q], \quad \bar{K} = k\left(\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_0}, \ldots, \frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}_0}\right),$$

$$\bar{K}' = k\left(\frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_0}, \ldots, \frac{\bar{\eta}_q}{\bar{\eta}_0}\right), \quad \bar{K}^* = k\left(\frac{\bar{\xi}_1}{\bar{\xi}_0}, \ldots, \frac{\bar{\xi}_p}{\bar{\xi}_0}; \frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_0}, \ldots, \frac{\bar{\eta}_q}{\bar{\eta}_0}\right),$$

$$\bar{\Sigma} = k(\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p), \quad \bar{\Sigma}' = (\bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q), \quad \bar{\Omega} = k(\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p; \bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q).$$

En raison de [7] les corps K et $\bar{K}$ peuvent être assumées égaux, et de même K' et $\bar{K}'$, alors, par la mémoire mentionnée et le corollaire de la Prop. 1.6, on peut idéntifier les corps $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Sigma}'$ et $\bar{\Omega}$ avec les corps Σ, Σ' et Ω respectivement. Or, les coordonnées homogènes $(\bar{\xi}_i)$ et $(\bar{\eta}_j)$ résultent de multiplier les non homogènes par des éléments $\bar{\xi}_0$ et $\bar{\eta}_0$, respectivement, les quelles sont transcendantes sur $\bar{K}$ et $\bar{K}'$, on peut, donc, les choisir de façon que $\bar{\xi}_0$ soit transcendante sur $\bar{K}^*$ et $\bar{\eta}_0$ soit transcendante sur $\bar{K}^*(\bar{\xi}_0)$.

Dans cettes conditions, si $\tau_{\lambda, \mu}$ est la correspondance $\bar{\xi}_i \to \lambda \bar{\xi}_i$ $\bar{\eta}_j \to \mu \bar{\eta}_j$, $i = 0, \ldots, p$, $j = 0, \ldots, q$, $\lambda, \mu \in k$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ et si $\tau_{\lambda, \mu}(F(\bar{\xi}, \bar{\eta})) = 0$ étant $F(\bar{\xi}; \bar{\eta}) = \bar{\xi}_0^{\alpha_1} \bar{\eta}_0^{\beta_1} f_{\alpha_1 \beta_1}\left(\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}; \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{\eta}_0}\right) + \ldots$ $+ \bar{\xi}_0^{\alpha_n} \bar{\eta}_0^{\beta_n} f_{\alpha_n \beta_n}\left(\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}; \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{\eta}_0}\right)$ un élément de $\bar{P}^*$, il résulte

$$\lambda^{\alpha_1} \mu^{\beta_1} \bar{\xi}_0^{\alpha_1} \bar{\eta}_0^{\beta_1} f_{\alpha_1 \beta_1}\left(\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}; \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{\eta}_0}\right) + \ldots + \lambda^{\alpha_n} \mu^{\beta_n} \bar{\xi}_0^{\alpha_n} \bar{\eta}_0^{\beta_n} f_{\alpha_n \beta_n} = 0 \text{ d'où}$$

$f_{\alpha_i \beta_i}\left(\frac{\bar{\xi}_i}{\bar{\xi}_0}; \frac{\bar{\eta}_j}{\bar{\eta}_0}\right) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, donc $F(\bar{\xi}; \bar{\eta}) = 0$ et la correspondance $\tau_{\lambda, \mu}$ est un automorphisme de $\bar{P}^*$ et $(\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_p; \bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_q)$ sont les coordonnées bihomogènes du point général d'une variété algébrique double irreductible, $\bar{\mathfrak{B}}$, qui définit une correspondance algébrique, $T_{\bar{A}}$, entre $\bar{V}$ et $\bar{V}'$. Soient: v^* une évaluation arbitraire de Ω; v et v' ses évaluation subordonnées dans Σ et Σ' respectivement; W et $\bar{W}$ les centres de v sur V et $\bar{V}$ respectivement; W' et $\bar{W}'$ les centres de v' sur V' et $\bar{V}'$, respectivement, alors on aura: $W' = T_A(W)$, $\bar{W}' = T_{\bar{A}}(\bar{W})$, $\bar{W} = T_B(W)$ et $\bar{W}' = T_{B'}(W)$ d'où $W' = \overset{-1}{T}_{B'} \bar{T}_A T_B(W)$ et, comme cette rélation est elle valide pour toute sous-variété, W, de V, il resulte $T_A = T_{B'}^{-1} T_{\bar{A}} T_B$.

Q. e. d.

En vertu de ce théorème et du mémoire [8] de Zariski, l'étude des correspondances algébriques est réduit au càs dans le quel aussi bien la variété originale que la variété image sont localement normales dans l'espace projectif. Alors, *dans ce qui suit nous supposerons que les variétés V et V' sont normales dans l'espace projectif.*

§ 9. Expresions paramétriques des correspondances algébriques.

<u>Lemme 1.9.</u> *L'anneau $\mathfrak{U} = \Sigma[\tau_0, \ldots, \tau_m]$ admet les automorphismes $\tau_\alpha : \tau_i \to \alpha\tau_i$, $i = 0, \ldots, m$ où α est un élément, pas nul, arbitraire de Σ.*

Démonstration. Soit $F(\eta_i)=f_{\alpha_1}(\eta_i)+\ldots+f_{\alpha_n}(\eta_i)$ un élément de $\mathfrak{U}$ tel que $\tau_\sigma(F(\eta_i))=0$, les f_{α_i} étant formes par rapport aux (η_i) de dégrés α_i. Or, de $\tau_\sigma(F(\eta_i))=0$ il résulte

$$\sigma^{\alpha_1} f_{\alpha_1}(\eta_i)+\ldots+\sigma^{\alpha_n} f_{\alpha_n}(\eta_i)=0,$$

et, puisque le prémier membre de cette expresion appartient à Ω et celuici est un corps bihomogène, il en résulte que toutes les composantes bihomogènes de $\sum_{i=1}^{n}\sigma^{\alpha_i} f_{\alpha_i}(\eta_i)$ sont nulles, mais, ces composantes appartiennent aux $\sigma^{\alpha_i} f_{\alpha_i}(\eta_i)$, et puisque σ n'est pas nulle on a $f_{\alpha_i}(\eta_i)=0$, $i=1, \ldots, n$ d'où $F(\eta_i)=0$.

Q. e. d.

En raison de ce lemme on peut considérer les $(\eta_{i0}, \ldots, \eta_{im})$ comme coordonnées homogènes du point général d'une variété sur le corps base Σ, la quelle est appellée par v. d. Waerden, [5], *variété transformée du point général de* V.

A l'idéal $\mathfrak{U}(\eta_{i0}, \ldots, \eta_{im})$ et à ses idéals primaires on les appelle *idéals irrelevants de* $\mathfrak{U}$.

Lemme 2.9. (De I. Cohen, [8]). *Si l'idéal* $\mathfrak{U}(\theta_0, \ldots, \theta_a)$ *est irrelevant dans* $\mathfrak{U}$, *cet anneau dépend intégrement de* $\Sigma[\theta_0, \ldots, \theta_a]$.

Lemme 3.9. Si $\mathfrak{U}$ *dépend intégrement de* $\Sigma[\theta_0, \ldots, \theta_a]$ *et* $\varphi_i(\xi)\in\Sigma$, $\varphi_i(\xi)\neq 0$, $i=0, \ldots, a$, $\mathfrak{U}$ *dépend intégrement de* $\Sigma[\varphi_0\theta_0, \ldots, \varphi_a\theta_a]$.

Puisque, dans les hypothèses du lemme, $\mathfrak{U}(\theta_0, \ldots, \theta_a)= =\mathfrak{U}(\varphi_0\theta_0, \ldots, \varphi_a\theta_a)$ et est donc, une consequence inmediate de l'anterieure.

Théorème 1.9. Il existe a+1 *des éléments de* $\mathfrak{U}$ *de la forme*

$$\zeta_i=\frac{\theta_i}{H(\xi)}, \quad \theta_i=\sum_{j=0}^{m}\varphi_{ij}(\xi)\eta_{ij}, \quad i=0, \ldots, a, \qquad [1]$$

où $H(\xi)$ *et les* $\varphi_{ij}(\xi)$ *sont des formes de* P, *telles que*: a) ζ_i, $i=0, \ldots, a$ *sont algébriquement indépendantes sur* Σ *et* b):

$$\eta_i^{\rho_i}+c_1^{(i)}(\zeta)\eta_i^{\rho_i-1}+\ldots+c_{\rho_i}^{(i)}(\zeta)=0, \quad i=0, \ldots, m, \qquad [2]$$

où les $c_j^{(i)}(\zeta)$, $j=1, \ldots, \rho_i$, $i=0, \ldots, m$ *sont des formes par rap-*

port des (ς) *des dégrés* i *et dont les coefficients sont des formes de* P.

Démonstration. En raison du lemme anterieur, il existe $a+1$ des éléments, $\theta_i=\sum_{j=0}^{m}\varphi_{ij}(\xi)\eta_j$, òu les $\varphi_{ij}(\xi)$ appartiennent à P, telles que

$$\eta_i^{\rho_i}+a_1^{(i)}(\theta)\eta_i^{\rho_i-1}+\ldots+a_{\rho_i}^{(i)}(\theta)=0,\quad i=0,\ldots,m.$$

Appellant H(ξ) au minimun dénominateur commun de tous les coefficients, par rapport des θ, de toutes les $a_j^{(i)}(\theta)$, $i=1, \ldots, \rho_i$, $\iota=0, \ldots, m$, on a

$$\mathrm{H}(\xi)\eta_i^{\rho_i}+b_1^{(i)}(\theta)\eta_i^{\rho_i-1}+\ldots+b_{\rho_i}^{(i)}(\theta)=0,\quad i=0,\ldots,m;$$

et comme P* est il un anneau bihomogène, il resulte que toutes les composantes bihomogènes du prémier membre de l'expression anterieure serant nulles ; nous pouvons donc supposer que, déja, le prémier membre de l'expression écrite est bihomogène. En se rappellant qui les θ_i sont lineaires par rapport des (η) et en posant $\varsigma=\dfrac{\theta_i}{\mathrm{H}(\xi)}$, $i=0, \ldots, a$, on obtient le théorème.

Q. e. d.

<u>*Rémarque* 1.9.</u> L'anterieur théorème appliqué à l'anneau $\mathfrak{A}'=\Sigma'[\xi_0, \ldots, \xi_n]$ donne les relations suivantes

$$\xi_i^{\tau_i}+d_1^{(i)}(\varsigma')\xi_i^{\tau_i-1}+\ldots+d_{\tau_i}^{(i)}(\varsigma')=0,\quad i=0,\ldots,n, \qquad [2']$$

òu

$$\varsigma'_i=\frac{\theta'_i}{\mathrm{H}'(\eta)},\quad \theta'_i=\sum_{j=0}^{n}\varphi'_{ij}(\eta)\xi_j,\quad i=0,\ldots,b, \qquad [1']$$

les φ'_{ij}, H'(η) et les coefficients des $d_j^{(i)}$ par rapport des (ς'), sont des formes de P' et les $d_j^{(i)}$ des formes du dégré j par rapport des (ς').

<u>*Définition* 1.9.</u> Aux expresions (2) et (2') nous les appellerons *des expresions paramétriques de la correspondance algébrique.* Aux variétés des espaces affins $\mathrm{A}_{m+n+a+2}$ et $\mathrm{A}_{m+n+b+2}$ définies par les points généraux ($\xi_0, \ldots, \xi_n, \eta_0, \ldots, \eta_m, \varsigma_0, \ldots, \varsigma_a$) et ($\xi_0, \ldots, \xi_n, \eta_0, \ldots, \eta_m, \varsigma'_0, \ldots, \varsigma'_b$) nous les representerons par V^*_1 et V^*_2 respectivement.

Notations 1.9.

$$\overline{\mathrm{P}} = \mathrm{P}[\zeta_0, \ldots, \zeta_a], \quad \overline{\mathrm{P}}' = \mathrm{P}'[\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b],$$

$$\overline{\Sigma} = \Sigma(\zeta_0, \ldots, \zeta_a), \quad \overline{\Sigma}' = \Sigma'(\zeta'_0, \ldots, \zeta'_b), \quad \mathrm{P}^*_1 = \overline{\mathrm{P}}[\eta_0, \ldots, \eta_m],$$

$$\mathrm{P}^*_2 = \overline{\mathrm{P}}'[\xi_0, \ldots, \xi_n].$$

Rémarque 2.9. Les variétés définies par les points généraux $(\xi_0, \ldots, \xi_n ; \zeta_0, \ldots, \zeta_a)$ et $(\eta_0, \ldots, \eta_m ; \zeta'_0, \ldots, \zeta'_b)$ sont normales dans l'espace projectif.

Rémarque 3.9. Les expresions paramétriques de la correspondance algébrique ne sont pas univoquement déterminées par la variété $\mathfrak{V}$, pas même par un point général de $\mathfrak{V}$, mais, toutes les variétés V_1^* définies par elles sont birrationnellement equivalentes entre elles et avec les V^*_2.

§ 10. Sous-variétés régulières, irrégulières et fondamentales par rapport à une correspondance algébrique.

Soit $\mathfrak{P}^*$ un diviseur prémièr minime de $\mathrm{P}^* \mathfrak{P}$ qui gît sur $\mathfrak{P}$ étant $\mathfrak{P}$ un idéal prémièr, homogène, distinct de O et de l'irrelevant de P. Nous representerons par $\bar{\xi}_i$, $i=0, \ldots, n$ et par η_j, $j=0, \ldots, m$ éléments de $\mathrm{P}^*/\mathfrak{P}^*$ tels que $\xi_i \equiv \bar{\xi}_i (\mathfrak{P}^*)$, $i=0, \ldots, n$ et $\eta_j \equiv \bar{\eta}_j (\mathfrak{P}^*)$, $j=0, \ldots, m$, et nous mettrons $\Omega = k(\bar{\xi}_0, \ldots, \bar{\xi}_n ; \bar{\eta}_0, \ldots, \bar{\eta}_m)$ et $\bar{\Sigma} = k(\bar{\xi})$. Nous appellerons $\mathfrak{P}^{*\prime}$ l'idéal prémièr et bihomogène de $k[x ; y]$ qui définit la correspondance algébrique ; $\hat{\mathfrak{P}}$ l'idéal, de $\Sigma[y]$, qu'on obtient par substitution dans tous les polynômes de $\mathfrak{P}^{*\prime}$ les (x) par les (ξ) ; $\mathfrak{P} = (\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_t(\xi))$ l'idéal, de P, qui definit la sous-variété, W, de V, irreductible ; $\hat{\mathfrak{P}}'$ l'idéal de P[y] engendré par la même base que $\hat{\mathfrak{P}}$; $\mathfrak{Q} = (\hat{\mathfrak{P}}', \mathfrak{P})$; $\hat{\mathfrak{Q}}$ l'idéal qu'on obtient de substituer dans tous les polynômes de $\mathfrak{Q}$ les (ξ) par les $(\bar{\xi})$ et $\hat{\mathfrak{P}}_i$, $i=1, \ldots, t$ tous les diviseurs minimes prémiers de $\hat{\mathfrak{Q}}$.

Lemme 1.10. *L'idéal* $\hat{\mathfrak{P}}$ *est prémier et de dimension* a.

Démonstration. Si $f(\xi ; y)\, g(\xi ; y) \equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}})$ et $f(\xi ; y) \not\equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}})$, il-y-a un polynôme $\mathrm{H}(x ; y) \equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$ tel que $\mathrm{H}(\xi ; y) = f(\xi ; y)$ $g(\xi ; y)$ d'òu $\mathrm{H}(x ; y) = f(x ; y)\, g(x ; y) + \mathrm{P}(x ; y)$ òu $\mathrm{P}(x ; y)$ est tel que $\mathrm{P}(\xi ; y) = 0$ et, comme les (y) sont des indéterminées sur

Σ, tous les coefficients de $P(\xi ; y)$ par rapport aux (y) seront nuls, d'òu $P(x ; y) \equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$ et alors $f(x ; y) g(x ; y) \equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$; mais, comme $f(\xi ; y) \equiv\mid\equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}})$, on a que $f(x ; y) \equiv\mid\equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$ et $g(x, y) \equiv 0$ $(\mathfrak{P}^{*\prime})$ d'òu $g(\xi ; y) \equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}})$.

Soit Ω' le corps des quotients de $\Sigma[y]/\hat{\mathfrak{P}}$. Pour prouver que $\dim.(\hat{\mathfrak{P}}) = a$, il suffit de voir que $\Omega' \approx \Omega$. En effect, à l'élément $\dfrac{f(x; y) + \mathfrak{P}^{*\prime}}{g(x; y) + \mathfrak{P}^{*\prime}}$ de Ω, òu $g(x; y) \equiv\mid\equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$, on fait correspondre l'élément $\dfrac{f(\xi; y) + \hat{\mathfrak{P}}}{g(\xi; y) + \hat{\mathfrak{P}}}$; comme $g(x ; y) \equiv\mid\equiv 0 (\mathfrak{P}^{*\prime})$, $g(\xi ; y)$ n'appartient pas à $\hat{\mathfrak{P}}$, et l'élément $\dfrac{f(\xi; y) + \hat{\mathfrak{P}}}{g(\xi; y) + \hat{\mathfrak{P}}}$ appartient à Ω'. Il n-y-a pas de dificulté à démonstrer que la correspondance anterieure est une isomorphisme.

Q. e. d.

Théorème 1.10. *Le degré de transcendance de* $\bar{\Omega}$ *sur* $\bar{\Sigma}$ *n'est pas moindre que* a+1.

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}' = (F_1(x), \ldots, F_s(x))$ l'idéal prémier qui définit V, c'est-à-dire, $x_i \equiv \xi_i (\mathfrak{P}')$, $i = 0, \ldots, n$ et $\mathfrak{P}'' = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_t(x))$ l'idéal qui définit à W, alors, $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}''$. Soit $f_1(x)$ une forme qui appartient à $\mathfrak{P}''$ et n'appartient pas à $\mathfrak{P}'$; alors, l'idéal $I_1 = (\mathfrak{P}', f_1) \approx (f_1(\xi))$ a la dimension $r-1$, éttant r la dimension de $\mathfrak{P}'$ comme idéal homogène. Supposons qui nous avons trouvé les formes f_i, $i = 1, \ldots, j$, $j < r - \delta$, òu δ est la dimension de $\mathfrak{P}''$, telles que: 1. Toutes celles-ci appartient à $\mathfrak{P}''$. 2. $\dim.(I_j = (\mathfrak{P}', f_1, \ldots, f_j)) = r - j > \delta$. De $I_j \subset \mathfrak{P}''$ on déduit que ce dérnier idéal divise un diviseur prémier minime de I_j, au moins, p. e. à $\mathfrak{P}_1''$; comme $\dim.(\mathfrak{P}_1'') = \dim.(I_j) = r - j$ et $r - j > \delta$, $\mathfrak{P}''$ est diviseur propre de $\mathfrak{P}_1''$ et alors il-y-a une forme, f_{j+1}, telle que $f_{j+1} \equiv 0 (\mathfrak{P}'')$ et que f_{j+1} n'appartient pas à aucun diviseur prémier minime de I_j. Alors, $\dim. (I_{j+1} = (I_j, f_{j+1})) = r - j - 1$. D'òu il resulte qu'il-y-a $r - \delta$ formes : $f_1, \ldots, f_{r-\delta}$, telles que : $I = (\mathfrak{P}', f_1, \ldots, f_{r-\delta}) \subseteq \mathfrak{P}''$ et $\dim.(I) = \delta$, d'òu $\mathfrak{P}''$ est un diviseur prémier minime de I. Nous allons prouver que *l'idéal* $\mathfrak{P}^*$ *est un diviseur prémier minime de* $P^* \mathfrak{Q}$ òu $\mathfrak{Q} \approx I/\mathfrak{P}'$. En effet, de $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P} = (\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_t(\xi))$ on deduit $P^* \mathfrak{Q} \subseteq P^* \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}^*$ d'òu $\mathfrak{P}^*$ divise un diviseur prémier minime,

$\overline{\mathfrak{P}}^*$, de $P^*\mathfrak{Q}$. De $\overline{\mathfrak{P}}^* \subseteq \mathfrak{P}^*$ on déduit $\overline{\mathfrak{P}}^* \cap P \subseteq \mathfrak{P}^* \cap P = \mathfrak{P}$ et, comme $\mathfrak{Q} \subseteq \overline{\mathfrak{P}}^* \cap P$ et $\mathfrak{P}$ est un diviseur prémier minime de $\mathfrak{Q}$, on a $\overline{\mathfrak{P}}^* \cap P = \mathfrak{P}$, et alors $P^*\mathfrak{P} = P^*(\overline{\mathfrak{P}}^* \cap P) \subseteq \overline{\mathfrak{P}}^*$ d'où $\overline{\mathfrak{P}}^* = \mathfrak{P}^*$.

Par le Dimensionssatz ([3], pag. 43) on a que $\dim.(\mathfrak{P}^*) \geqslant$ grad. trans. $(\Omega : k) - (r - \mathfrak{z}) =$ grad. trans. $(\Sigma : k) + \dim.(\hat{\mathfrak{P}}) - (r - \mathfrak{z}) = r + 1 + \dim.(\hat{\mathfrak{P}}) - (r - \mathfrak{z}) = \dim.(\hat{\mathfrak{P}}) + \mathfrak{z} + 1$. Mais, comme grad. trans. $(\bar{\Sigma} : k) = \dim.(\mathfrak{P}) = \mathfrak{z} + 1$, $\dim.(\hat{\mathfrak{P}}) = a + 1$ et grad. trans. $(\overline{\Omega} : k) = \dim.(\mathfrak{P}^*)$ on a grad. trans. $(\overline{\Omega} : \bar{\Sigma}) =$ grad. trans. $(\overline{\Omega} : k) -$ grad. trans. $(\bar{\Sigma} : k) = \dim.(\mathfrak{P}^*) - (\mathfrak{z} + 1) \geqq \dim.(\hat{\mathfrak{P}}) = a + 1$.

Q. e. d.

Définition 1.10. Si $\mathfrak{P}$ est un idéal de P, prémier, homogène, pas irrelevant ; $\mathfrak{P}_i^*$, $i = 1, \ldots, g$ les idéals prémieres minimes de $P^*\mathfrak{P}$ que gisent sur $\mathfrak{P}$; $\mathfrak{P}_i' = \mathfrak{P}_i^* \cap P$, $i = 1, \ldots, g$; $\overline{\Omega}_i$ le corps des quotients de $P^*/\mathfrak{P}_i^*$ et $\bar{\Sigma}$ le corps des quotients de $P/\mathfrak{P}$; nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est non fondamentale par rapport à la composante* $\mathfrak{P}_i'$ de sa transformée quand grad. trans. $(\overline{\Omega}_i : \bar{\Sigma}) = a + 1$. Si grad. trans. $(\overline{\Omega}_i : \bar{\Sigma}) > a + 1$ nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est fondamentale par rapport à la dite composante*. Si $\mathfrak{P}$ est non fondamentale par rapport à toutes les composantes de sa transformée, nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est non fondamentale* ; dans le cas contraire nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est fondamentale*. Si $\mathfrak{P}$ est non fondamentale par rapport à $\mathfrak{P}_i'$ et si celle-ci est non fondamentale par rapport à la composante de sa transformée qui contient à $\mathfrak{P}$, dans la transformation inverse, nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est régulièr par rapport à* $\mathfrak{P}_i'$, et si on verifie la prémier condition et on ne verifie pas la seconde, nous dirons que $\mathfrak{P}$ *est irrégulièr par rapport à* $\mathfrak{P}_i'$. Si $\mathfrak{P}$ est regulière par rapport à toutes les composantes de sa transformée, nous dirons qu'elle est *régulière*. Si $\mathfrak{P}$ est non fondamentale et non regulière, nous dirons qu'elle est *irrégulière*.

Lemme 2.10. *Tout diviseur prémièr minime de* $\mathfrak{Q}$ *se transforme au moyen de la correspondance* $(\xi) \to (\bar{\xi})$, *effectuée dans tous leurs polynômes, dans un diviseur prémier minime de* $\hat{\mathfrak{Q}}$, *et. reciproquement, tout diviseur prémièr minime de* $\hat{\mathfrak{Q}}$ *est imâge, dans la correspondance precedente, d'un diviseur prémier minime de* $\mathfrak{Q}$.

Démonstration. 1. Soient $\mathfrak{P}_i$, $i=1, \ldots, s$ toutes les d.p.m. de $\mathfrak{Q}$ et appellons $\dot{\mathfrak{P}}_i$, $i=1, \ldots, s$ aux idéals qu'on obtient par substitution, dans tous les polynômes des $\mathfrak{P}_i$, des (ξ) par les $(\bar{\xi})$. De $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}_1$ il resulte $\hat{\mathfrak{Q}} \subseteq \dot{\mathfrak{P}}_1$. Nous allons voir, prémierement, que $\dot{\mathfrak{P}}_1$ *est prémièr.* En effet, de $f(\bar{\xi}; y)\, g(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\dot{\mathfrak{P}}_1)$ et $f(\bar{\xi}; y) \equiv|\equiv 0\, (\dot{\mathfrak{P}}_1)$ il resulte que $f(\xi; y) \equiv|\equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$ et qu'il existe un polynôme, $F(\xi; y)$, tel que $F(\xi; y) = f(\xi; y)\, g(\xi; y) + G(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$ et que $G(\bar{\xi}; y) = 0$ d'òu, pour être les (y) indéterminées sur $\bar{\Sigma}$, il resulte que $G(\xi; y) \equiv 0\ (P[y]\mathfrak{P})$ et, a fortiori, $G(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{Q})$, d'òu $f(\xi; y)\, g(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$ et alors $g(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\dot{\mathfrak{P}}_1)$.

Si $\dot{\mathfrak{P}}_1$ n'etait pas minime, diviserait un d.p.m., $\mathfrak{P}_i$, et $\hat{\mathfrak{Q}} \subseteq \hat{\mathfrak{P}}_1 \subset \dot{\mathfrak{P}}_1$ et il-y-aurait un polynôme, f, tel que $f(\xi; y) \equiv 0\, (\dot{\mathfrak{P}}_1)$ et $f(\bar{\xi}; y) \equiv|\equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}}_1)$ et, comme anterieurement, on obtiendrait que $f(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$. Or, comme $\mathfrak{P}_1$ est d.p.m. de $\mathfrak{Q}$, il existe un polynôme, $g(\xi; y)$, tel que $g(\xi; y) \equiv|\equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$ et $f^\rho(\xi; y) g(\xi; y) = 0\, (\mathfrak{Q})$, d'où $f^\rho(\bar{\xi}; y)\, g(\bar{\xi}; y) = 0\, (\hat{\mathfrak{Q}})$ et $g(\bar{\xi}; y) \equiv|\equiv 0 (\hat{\mathfrak{Q}})$ car si on verifiait $g(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\hat{\mathfrak{Q}})$ on auriait, comme plus haut, que $g(\xi; y) \equiv 0\ (\mathfrak{Q})$ en contradiction avec $g(\xi; y) \equiv|\equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$. Par consequent, $g(\bar{\xi}; y) \equiv|\equiv 0\, (\hat{\mathfrak{P}}_1)$ et $f(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\hat{\mathfrak{P}}_1)$; contradiction.

2. Réciproquement, soit $f(\bar{\xi}; y)$ un polynôme arbitraire de $\hat{\mathfrak{P}}_i$, $i=1, \ldots, t$ alors il-y-a un autre polynôme, $\varphi(\bar{\xi}; y)$, tel que $\varphi(\bar{\xi}; y) \equiv|\equiv 0 (\hat{\mathfrak{P}}_1)$ et $f^\rho(\bar{\xi}; y)\, \varphi(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\hat{\mathfrak{Q}})$, d'òu, comme anterieurement, il resulte que $f^\rho(\xi; y)\, \varphi(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{Q})$. Si φ appartient à tous les d.p.m. de $\mathfrak{Q}$, on aurait qu'il existerait un nombre naturel, τ, tel que $\varphi^\tau \equiv 0\, (\mathfrak{Q})$, d'òu $\varphi^\tau(\bar{\xi}; y) \equiv 0\, (\hat{\mathfrak{P}}_1)$. Soit, alors, $\mathfrak{P}_1$ un d.p.m. de $\mathfrak{Q}$ qui ne contient pas à φ; alors, $f(\xi; y) \equiv 0\, (\mathfrak{P}_1)$ et si $\hat{\mathfrak{P}}_i$, $i=1, \ldots, s$ sont les d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$ imâges de tous les d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$, il resulte que tout polynôme d'un d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$ appartient à un, au moins, de leurs d.p.m., $\hat{\mathfrak{P}}_i$, qui est une image d'un autre d.p.m. de $\mathfrak{Q}$, e.e. $i \leqslant s$. S'il-y-avait un autre d.p.m., $\hat{\mathfrak{P}}_{s+1}$, de $\hat{\mathfrak{Q}}$ distinct des $\hat{\mathfrak{P}}_i$, $i=1, \ldots, s$ on pourrait choisir un polynôme, f_1, tel que $f_1 \equiv 0\, (\hat{\mathfrak{P}}_{s+1})$ et $f_1 \equiv|\equiv 0\, (\hat{\mathfrak{P}}_1)$. Supposons que nous

avons trouvé un polynôme, f_i, tel que $f_i\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_{s+1})$, $f_i \not\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_j)$, $j=1, \ldots, i$. Soit $\varphi\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_{s+1})$, $\varphi\not\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_{i+1})$, alors, $\lambda f_i+\mu\varphi\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_{s+1})$ pour n'importe quelle paire de valeurs de k qu'on puisse donner à λ et μ ; or, si λ, μ et λ', μ' sont des éléments de k tels que $\lambda\mu'-\lambda'\mu\neq 0$, les deux éléments $\lambda f_i+\mu\varphi$ et $\lambda' f_1+\mu'\varphi$ n'appartient pas au même idéal $\hat{\mathfrak{P}}_j$, $j=1, \ldots, i+1$, et alors, comme k a une infinité d'éléments, on peut déterminer, au moyen d'un nombre finite d'épreuves, deux éléments, λ, μ, tels que $\lambda f_i+\mu\varphi=f_{i+1}\not\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_j)$, $j=1, \ldots, i+1$ en contradiction avec ce qui precede.

Q. e. d.

Lemme 3.10. L'idéal $\mathfrak{Q}=(\hat{\mathfrak{P}}, \mathfrak{P})$ de $\mathrm{P}[y]$ se transforme, au moyen de la substitution $(y)\rightarrow(\eta)$ efectuée dans tous leurs polynômes, dans l'idéal $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$. Tout d.p.m. de $\mathfrak{Q}$ se transforme en un d.p.m. de $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$ et tout d.p.m. de $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$ est une imâge d'un d.p.m. de $\mathfrak{Q}$ dans la correspondance anterieure.

La démonstration de ce lemme est tout à fait analogue à celle du lemme anterieur.

En vertu des lemmes 10.2 et 10.3 il-y-a une correspondance biunivoque entre les d.p.m. de $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$ tel que à tout d.p.m., $\mathfrak{P}_i$, de $\mathfrak{Q}$ lui correspondent les d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$ et de $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$ qu'on obtient par substitution, dans tous les polynômes de $\mathfrak{P}$, des (ξ) par les $(\bar{\xi})$ ou les (y) par les (η) respectivement.

Lemme 4.10. Si $\mathfrak{P}$ est non fondamentale par rapport à la composante $\mathfrak{P}^*$ de $\mathrm{P}^*\mathfrak{P}$ et si $\hat{\mathfrak{P}}$ est d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$ correspondant à $\mathfrak{P}_i^*$ dans la correspondance anterieure, on a que dim. $(\hat{\mathfrak{P}})=a$ (consideré comme idéal homogène de $\bar{\Sigma}[y]$).

Démonstration. Soit $\bar{\Omega}_i$ le corps des quotients de $\mathrm{P}^*/\mathfrak{P}^*$; $\bar{\Sigma}$, comme précédemment, le corps des quotients de $\mathrm{P}/\mathfrak{P}$ et $\hat{\Omega}_i$ celui de $\bar{\Sigma}[y]/\hat{\mathfrak{P}}_i$. En raison du Th. 1.10, tout se réduit à prouver que $\bar{\Omega}_i\approx\hat{\Omega}_i$. Pour cela nous considerons la correspondance qui représente un élément arbitraire, $\hat{\omega}$, de $\hat{\Omega}_i$: $\hat{\omega}=\dfrac{f(\bar{\xi}; y)+\hat{\mathfrak{P}}_i}{g(\bar{\xi}; y)+\hat{\mathfrak{P}}_i}$, $f, g\in k[\bar{\xi}; y]$, $g(\bar{\xi}; y)\not\equiv 0(\hat{\mathfrak{P}}_i)$ sur l'élément $\dfrac{f(\bar{\xi}; \bar{\eta})}{g(\bar{\xi}; \bar{\eta})}$. Cette correspondance est un isomorphisme entre $\hat{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_1$. En effet:

a) L'élément $\dfrac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})}$ appartient à $\bar{\Omega}_1$. Pour voir ceci il suffit de prouver que $g(\bar{\xi};\bar{\eta})\neq 0$, ce qui est une conséquence inmediate des lemmes 2.10 et 3.10.

b) Tout élément de $\bar{\Omega}_1$ est l'image d'un élément, et seulement d'un, de $\hat{\Omega}_1$. En effet, de $\dfrac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})} \in \bar{\Omega}$ il resulte que $g(\xi;\eta)\equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}_1^*)$ et, par le L. 3.10, $g(\xi;y)\equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}_1)$ d'òu, par le lemme 2.10 $g(\bar{\xi};y)\equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\hat{\mathfrak{P}}_1)$ donc, $\dfrac{f(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1} \in \hat{\Omega}_1$ et son imâge dans la correspondance donnée est l'élément donné. Soient $\dfrac{f(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}$ et $\dfrac{\varphi(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{\psi(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}$ deux éléments de $\hat{\Omega}$ qu'on represente sur le même élément de $\bar{\Omega}_1$ c'est à dire, $\dfrac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})}=\dfrac{\varphi(\bar{\xi};\bar{\eta})}{\psi(\bar{\xi};\bar{\eta})}$ d'òu $f(\bar{\xi};\bar{\eta})\psi(\bar{\xi};\bar{\eta})=\varphi(\bar{\xi};\bar{\eta})g(\bar{\xi};\bar{\eta})$ donc $f(\xi;\eta)\psi(\xi;\eta)-$ $-\varphi(\xi;\eta)g(\xi;\eta)\equiv 0\,(\mathfrak{P}_1^*)$ et, par le L. 3.10, $f(\xi;y)\psi(\xi;y)-$ $-\varphi(\xi;y)g(\xi;y)\equiv(\mathfrak{P}_1)$ et, par le L. 2.10, $f(\bar{\xi};y)\psi(\bar{\xi};y)-$ $-\varphi(\bar{\xi};y)g(\bar{\xi};y)\equiv 0\,(\hat{\mathfrak{P}}_1)$ d'òu

$$\frac{f(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}=\frac{\varphi(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{\psi(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}$$

c) La correspondance anterieure est un homomorphisme. En effet, à l'élément

$$\frac{f(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}+\frac{f'(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g'(\bar{\xi};y)+\hat{\mathfrak{P}}_1}=\frac{(fg'+f'g)+\hat{\mathfrak{P}}_1}{gg'+\hat{\mathfrak{P}}_1}$$

de $\hat{\Omega}_1$ lui correspond l'élément

$$\frac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})g'(\bar{\xi};\bar{\eta})+f'(\bar{\xi};\bar{\eta})g(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})g'(\bar{\xi};\bar{\eta})}=\frac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})}+\frac{f'(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g'(\bar{\xi};\bar{\eta})}$$

de $\bar{\Omega}_1$ et à l'élément

$$\frac{f+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g+\hat{\mathfrak{P}}_1}\,\frac{f'+\hat{\mathfrak{P}}_1}{g'+\hat{\mathfrak{P}}_1}=\frac{ff'+\hat{\mathfrak{P}}_1}{gg'+\hat{\mathfrak{P}}_1}$$

de $\hat{\Omega}_i$ lui codrespond le

$$\frac{f(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g(\bar{\xi};\bar{\eta})}\ \frac{f'(\bar{\xi};\bar{\eta})}{g'(\bar{\xi};\bar{\eta})}$$

Q. e. d.

Nous representerons par I à l'idéal $\bar{\Sigma}[y]\hat{\mathfrak{Q}}$.

<u>Lemme 5.10.</u> *Si* $\mathfrak{P}$ *n'est pas fondamentale, on peut détermi-ner* m—a *polynômes,* $p_i'(\bar{\xi}; y)$, i=1, ..., m—a, *tels que* $I'=\bar{\Sigma}[y](p_1', ..., p'_{m-a})$ *est de dimension a et que* $I' \subset I$.

Démonstration. Par le lemme anterieur et parce que $\mathfrak{P}$ n'est pas fondamentale, on a que dim. (I) $=a$. Soit $p_1'(\bar{\xi}; y)$ un polynôme homogène arbitraire et irreductible de I, dont les coefficients par rapport des (y) nous pouvons les supposer qui appartiennent à $k[\bar{\xi}]$, et soit $I_1=(p_1')$; alors, dim. $(I_1)=m-1$ et si $a<m-1$, sera I diviseur propre de I_1 et il-y-aura un polynôme homogène et irreductible, $p_2'(\bar{\xi}; y)$, tel que $p_2'(\bar{\xi}; y)\equiv 0\,(I)$, $p_2' \not\equiv 0\,(I_1)$ et puisque I_1 est prémier, dim. $(I_2=(p_1', p_2'))=m-2$ et $I_2 \subseteq I$. Supposons que nous avons trouvé l'idéal homogène $\bar{\Sigma}[y](p_1' \ ..., \ p_j')=I_j$ tel que dim. $(I_j)=m-j<a$, que $I_j \subset I$ et que tout d.p.m. de I_j est de dimension $m-j$ (par le Dimensionssatz, [3], pag. 43). Comme tout d.p.m. de I a dimension a (L. 4.10), on a que tout d.p.m. de I est diviseur *propre* d'un d.p.m. de I_j au moins. Soient $\mathfrak{P}_1$, ..., $\mathfrak{P}_t$ tous les d.p.m. de I. $\mathfrak{P}_1'$, ..., $\mathfrak{P}_s'$ tous les d.p.m. de I_j. Comme les prémièrs ne sont pas contenus ni coincidents avec aucun des seconds, on a qu'on peut trouver des éléments, μ_h, tels que $\mu_h\equiv 0\,(\mathfrak{P}_i)$, $\mu_h \not\equiv 0\,(\mathfrak{P}_h')$, $h=1$, ..., s. Supposons que nous avons trouvé un élément, ω_i', tel que $\omega_i'\equiv 0\,(\mathfrak{P}_i)$, $\omega_i' \not\equiv 0\,(\mathfrak{P}_h')$, $h=1$, ..., $l<s$; des deux éléments $\omega_i'+\lambda\mu_{l+1}$ et $\omega_i'+\lambda'\mu_{l+1}$, $\lambda \neq \lambda'$, un, au plus, peut appartenir à un des idéals $\mathfrak{P}_i'$, $i=1$, ..., $l+1$, alors, on peut déterminer ω'_{l+1} tel que $\omega'_{l+1}\equiv 0\,(\mathfrak{P}_i)$, $\omega'_{l+1} \not\equiv 0\,(\mathfrak{P}_h')$, $h=1$, ..., $l+1$. Soient ω_i, $i=1$, ..., t éléments tels que $\omega_i\equiv 0\,(\mathfrak{P}_i)$, $\omega_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{P}_h')$, $i=1$, ..., t; $h=1$, ..., s. Alors $\omega=\prod_{i=1}^{t}\omega_i$ est tel que $f_{j+1}=\omega^{\tau}\equiv 0\,(I)$ et $f_{j+1} \not\equiv 0\,(\mathfrak{P}_h')$, $h=1$, ..., s, et alors $I_{j+1}=(I_j, f_{j+1})$ a dimension $m-j-1$ et $I_{j+1} \subseteq I$.

Q. e. d.

Soient $p_i(\xi ; y)$, $i=1, ..., m-a$ polynômes de $\hat{\mathfrak{P}}$ tels que $p_i(\bar{\xi} ; y)=p_i'(\bar{\xi} ; y)$, $i=1, ..., m-a$.

Lemme 6.10. *Si* $\mathfrak{P}$ *n'est pas fondamental, l'idéal* $\mathrm{J}=\Sigma[y](p_1(\xi ; y), ..., p_{m-a}(\xi ; y))$ *a dimension* a (comme idéal homogène).

Démonstration. En premièr lieu, on doit observer que les polynômes p_i', $i=1, ..., m-a$ du lemme précedent peuvent être choisis tels qu'ils soient homogènes et, alors, I' peut etre consideré comme homogène. Alors, comme $\hat{\mathfrak{P}}$ est aussi homogène, on peut choisir les $p_i(\xi ; y)$, $i=1, ..., m-a$ telles qu'ils soient homogènes et, donc, J peut etre regardé comme homogène.

Soit $\mathfrak{P}_i$ un d.p.m. arbitraire de J, et soit

$$\mathrm{P}_i^*=k[\xi ; y]/\mathfrak{P}_1 \cap k[\xi; y], \quad (y)\equiv(\eta^i) \text{ mod. } (\mathfrak{P}_i);$$
$$\mathfrak{Q}_i=(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}) \in k[\xi; y];$$

et $\hat{\mathfrak{Q}}_i$ l'idéal de $k[\bar{\xi} ; y]$ qu'on obtient par substitution, dans tous les polynômes de $\mathfrak{Q}_i$, des (ξ) par les $(\bar{\xi})$; et $\hat{\mathfrak{P}}_{ij}$, $j=1, ..., \alpha_i$ tous les d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}$. Comme dans le lemme 2.10 on prouve :

a) «Tout d.p.m. de $\mathfrak{Q}_i$ se transforme moyennant la substitution $(\xi)\to(\bar{\xi})$, éfectuée dans tous ses polynômes, en un d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}_i$ et tout d.p.m. ce delui-ci est l'imâge d'un autre de ceiui-là.»

Comme dans le L. 3.10, on prouve :

b) «L'idéal $\mathfrak{Q}$ de P[y] se transforme moyennant la substitution $(y)\to(\eta^i)$, efectuée dans tous ses polynômes, dans l'idéal $\mathrm{P}_i^*\,\mathfrak{P}$. Tout d.p.m. de $\mathfrak{Q}_i$ se transforme en un d.p.m. de $\mathrm{P}_i^*\,\mathfrak{P}$ et, reciproquement, tout d.p.m. de celui-la est l'imâge d'un de celui-là.

Comme dans le L. 4.10 on démontre :

c) Si $\hat{\mathfrak{P}}_{ij}$ est le d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}_i$ correspondant (dans la correspondance de *b*)) au d.p.m. $\mathfrak{P}_{ij}^*$ de $\mathrm{P}_i^*\,\mathfrak{P}$, on a :

$$\dim.(\bar{\Sigma}[y]\,\hat{\mathfrak{P}}_{ij})=\dim.(\mathfrak{P}_{ij}^*)-\dim.(\mathfrak{P}).$$

d) De $\mathrm{J}\subset\mathfrak{P}_i$ on déduit que $\mathrm{I}'\subset\hat{\mathfrak{Q}}_i$, et alors tout d.p.m. de $\hat{\mathfrak{Q}}_i$ divise un d.p.m. de I' ; et comme dim.(I')$=a$ on a que dim.$(\hat{\mathfrak{P}}_{ij})\leqslant a$, $j=1, ..., \alpha_i$.

De c) et d) on en tire:

e) $\dim.(\mathfrak{P}_{1j}^*)-\dim.(\mathfrak{P})\leqslant a,\ j=1,\ \dots,\ \alpha_1$.

Etant $r+1$ le dégré de transcendance de Σ sur k et δ la dimension de l'idéal homogène $\mathfrak{P}$, on a, par la prémièr partie de la démonstration du Th. 1.10, que:

f) Il-y-a $r-\delta$ formes: $f_i(\xi)$, $i=1,\ \dots,\ r-\delta$ telles que

$$\mathfrak{Q}=(f_1(\xi),\ \dots,\ f_{r-\delta}(\xi))\subset\mathfrak{P} \quad \text{et} \quad \dim.(\mathfrak{Q})=\dim.\ \mathfrak{P})$$

g) En vertu de la Prop. 2.7 il-y-a un d.m.p., $\mathfrak{P}_{1j}^*$, de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ que gît sur $\mathfrak{P}$.

h) L'idéal $\mathfrak{P}_{1j}^*$ est un d.p.m. de $P^*\,\mathfrak{Q}$. En effet, de $\mathfrak{Q}\subseteq\mathfrak{P}$ on déduit que $P_1^*\mathfrak{Q}\subseteq P_1^*\,\mathfrak{P}\subseteq\mathfrak{P}_{1j}^*$, et d'ici que $\mathfrak{P}_{1j}^*$ divise un d.p.m., $\overline{\mathfrak{P}}^*$, de $P^*\mathfrak{Q}$; et alors, $\overline{\mathfrak{P}}^*\cap P\subseteq\mathfrak{P}_{1j}^*\cap P=\mathfrak{P}$ et, comme $\mathfrak{Q}\subseteq\overline{\mathfrak{P}}^*\cap P$ et $\mathfrak{P}$ est un d.p.m. de $\mathfrak{Q}$, il resulte que $\overline{\mathfrak{P}}^*\cap P=\mathfrak{P}$ et alors $P_1^*\,\mathfrak{P}=P_1^*(\overline{\mathfrak{P}}^*\cap P)\subseteq\overline{\mathfrak{P}}^*$ d'òu $\overline{\mathfrak{P}}^*=\mathfrak{P}_{1j}^*$.

i) $\dim.(\mathfrak{P}_{1j}^*)-\dim.(\mathfrak{P})\geqslant\dim.(\mathfrak{P}_1)$. En effet, de h) et du Dimensionssatz on déduit que $\dim.(\mathfrak{P}_{1j}^*)\geqslant\text{grad. trans.}(\Omega_1^*:k)-$ $-(r-\delta)=\text{grad. trans.}(\Sigma:k)+\dim.(\mathfrak{P}_1)-(r-\delta)=r+1+$ $+\dim.(\mathfrak{P}_1)-r+\delta=\dim.(\mathfrak{P}_1)+\delta+1$, et, comme $\dim.(\mathfrak{P})=\delta+1$, on a la proposition.

j) De e) et i) on déduit que $\dim.(\mathfrak{P}_1)\leqslant a$ et, comme $\mathfrak{P}_1$ est un d.p.m. de J, $\dim.(\mathfrak{P}_1)\geqslant a$ d'òu $\dim.(\mathfrak{P}_1)=a$.

Q. e. d.

<u>*Théorème 2.10.*</u> *Si la sousvariété irreductible* $\mathfrak{P}$ *n'est pas fondamentale, on peut déterminer les* (z) *du Th.* 1.9 *de façon que* $H(\xi)\equiv|\equiv 0\,(\mathfrak{P})$.

Démonstration. En raison du lemme anterieur, on peut trouver $m-a$ *formes*, $F_i(x\,;\,y)$, $i=1,\ \dots,\ m-a$ qui appartiennet à l'idéal $\mathfrak{P}^{*\prime}$ qui definit la correspondance algébrique, tels que les idéals:

$$I=\Sigma[y](F_1(\xi;y),\dots,F_{m-a}(\xi;y)) \quad \text{et} \quad I'=\bar{\Sigma}[y](F_1(\bar{\xi};y),\dots,F_{m-a}(\bar{\xi};y))$$

de $\Sigma[y]$ et $\bar{\Sigma}[y]$ respectivement, ont la dimension a (considérées comme idéals homogènes).

Nous faisons, dans l'espace projectif correspondant à l'anneau $k(\xi_0,\ \dots,\ \xi_n)[y_0,\ \dots,\ y_m]$, la transformation des coordonnées:

$$y_i=\sum_{j=0}^{m}\varphi_{ij}(\xi)\,y_j^*,\quad \varphi_{ij}(\xi)\in k[\xi_0,\ \dots,\ \xi_n],\quad j,\,i=0,\ \dots,\ m, \quad [1]$$

d'òu

$$y_i^* = \frac{1}{|\varphi_{ij}|} \sum_{j=0}^{m} \psi_{ij}(\xi)\, y_j, \quad i = 0, \ldots, m. \qquad [1']$$

On peut déterminer la matrice (φ_{ij}) de la transformation precédent en remplissant les conditions suivantes :

a) $\sum_{j=0}^{m} \varphi_{ij}(\xi)\, y_j^*$, $i=0, \ldots, m$ sont des formes bihomogènes.

b) $|\varphi_{ij}(\xi)| \equiv\!\!\!|= 0\,(\mathfrak{P})$.

c) $\psi_{ij}(\xi) \equiv\!\!\!|= 0\,(\mathfrak{P})$, $i=0, \ldots, m$.

Par une énumeration convenable des y_i^* on peut supposer que :

d) Les $y_i^* = \frac{1}{|\varphi_{ij}(\xi)|} \sum_{j=0}^{m} \psi_{ij}(\xi)\, y_j$, $i = m-a, \ldots, m$ sont indépendants par rapport à I, c'est à dire- il n-y-a aucun polynôme qui dépende seulement de celles-là et qu'appartienne à I.

Comme dim. $(I') = a$, on peut imposer aussi la condition suivante :

e) $$F_i(\xi; y) = \Phi_i(\xi; y^*) = a_0^{(i)}{}_{\ldots 0}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m)\, y_0^{*\mu_i} + $$
$$+ a_0^{(i)}{}_{\ldots 01}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m)\, y_0^{*\mu_i - 1} y_1^* + \ldots + a^{(i)}_{i-1, \ldots, i-1}(\xi)\, y^{*\mu_i}_{i-1} +$$
$$\ldots + a^{(i)}_{m-a-1}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m)\, y^{*\mu_{i, m-a-1}}_{m-a-1} +$$
$$+ a^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m), \quad i = 1, \ldots, m-a \qquad [2]$$

òu les $a^{(i)}_{i-1, \ldots, i-1}(\xi)$, $i = 1, \ldots, m-a$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}$.

Etant l'idéal $I = (F_1(\xi; y), \ldots, F_{m-a}(\xi; y))$ de dimension $a+1$ sur Σ (considéré comme idéal ordinaire), la resultante, $\Psi_0(\xi; y_0^*; y^*_{m-a}, \ldots, y_m^*)$ des formes (2) par rapport à $y_1^*, \ldots, y^*_{m-a-1}$ sera une forme bihomogène par rapport des (ξ) et des (y^*) telle que, considérée comme polynôme par rapport de y_0^*, n'est pas identiquement nulle, parce que, dans le cas contraire, on aurait dim. $(I) \geqslant m+1-(m-a-1) = a+2$ (comme idéal ordinaire). Dans Ψ_0 figurera le terme principal, ([6] pag. 15) :

$$[a^{(1)}_{1, \ldots, 1}(\xi)]^{\lambda_1} \ldots [a^{(m-a-1)}_{m-a-1, \ldots, m-a-1}(\xi)]^{\lambda_{m-a}} [a^{(0)}_{0, \ldots, 0}(\xi)\, y_0^{*\mu_1} + a^{(1)}(\xi; y^*_{m-1}, \ldots, y^*_m)]^{\lambda_1}$$

où $\lambda_i = \mu_1 \ldots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \ldots \mu_{m-a}$, $i=1, \ldots, m-a$ et, par *e)* :

$$A(\xi) = \prod_{i=0}^{m-a-1} [a^{(i)}_{i, \ldots, i}(\xi)]^{\lambda_{i+1}} \equiv\!\!\!|= 0\,(\mathfrak{P}). \qquad [3]$$

Analoguement, par élimination de $y^*_0, y^*_2, \ldots, y^*_{m-a-1}; \ldots; y^*_0, y^*_1, \ldots, y^*_{m-a-2};$ on obtiennt:

$$\Psi_i = A(\xi)\, y_i^{*\mu} + b_1^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y_m^*)\, y_i^{*\mu-1} + \ldots + b_\tau^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m) \quad [4]$$

qui serant des formes bihomogènes, parce que le sont les F_i, $i=1, \ldots, m-a$.

Par substitution, dans les (4), des $y_0^*, \ldots, y^*_{m-a-1}$ par leurs expressions (1'), on a

$$A(\xi)\left[\frac{1}{|\varphi_{ij}(\xi)|}\sum_{j=0}^{m}\psi_{ij}(\xi)\, y_j\right]^{\mu} + b_1^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m)\left[\frac{1}{|\varphi_{ij}|}\sum_{j=0}^{m}\psi_{ij}(\xi)\, y_j\right]^{\mu-1} + \\ + \ldots + b_\tau^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m), \quad i=0, \ldots, m-a-1 \quad [5]$$

Entre les (5) et les

$$\frac{1}{|\varphi_{ij}|}\sum_{j=0}^{m}\psi_{kj}(\xi)\, y_j - y^*_k, \quad k = m-a, \ldots, m, \quad [6]$$

on peut éliminer les $(y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_m)$, $i=0, \ldots, m$, et on obtient

$$\Theta_i(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m : y_i) = \frac{1}{|\varphi_{ij}(\xi)|^{\tau}} A^{\nu}(\xi)\,[\psi_{00}(\xi) \ldots \psi_{m,m}(\xi)]^{\tau}\, y_i^{\tau} + \\ + \frac{1}{|\varphi_{ij}|^{\tau-1}}\, a_1^{(i)}(\xi; y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m)\, y_i^{\tau-1} + \ldots + a_\tau^{(i)}(y^*_{m-a}, \ldots, y^*_m; \xi), \quad [7] \\ i = 0, \ldots, m,$$

et, par les conditions anterieures, on a

$$H^*(\xi) = A^{\nu}(\xi)\,[\psi_{00}(\xi) \ldots \psi_{mm}(\xi)]^{\tau} \equiv\!|\!\equiv 0(\mathfrak{P}).$$

Comme $\hat{\mathfrak{P}}$ est un d.p.m. de $I=(F_1(\xi; y), \ldots, F_{m-a}(\xi; y))$ les (ξ) et les (η_i) elles annulent les polynômes (7) et, possiblement, quelques facteurs irreductibles de ceux-ci:

$$H_i(\xi)\,\eta_{ii}^{\rho_i} + e_1^{(i)}(\xi; \theta^*_0, \ldots, \theta^*_a)\,\eta_{ii}^{\rho_i-1} + \ldots + e_{\rho_i}^{(i)}(\xi; \theta^*_0, \ldots, \theta^*_a) = 0 \quad [8]$$

$$\theta^*_j = \sum_{k=0}^{m}\psi_{k,\,m-a+j}(\xi)\,\eta_{ik}, \; i = 0, \ldots, m, \; j = 0, \ldots, a,$$

où les $H_i(\xi)$ sont des facteurs de $H^*(\xi)$ et donc n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}$.

Si nous mettons $H(\xi)=\prod_{i=0}^{m} H_i(\xi)$, òu on se passe des facteurs répetés, on a

$$\eta_{i}^{\rho_i}+d_1^{(i)}(\varsigma_0,\ldots,\varsigma_a)\,\eta_i^{\rho_i-1}+\ldots+d_{\rho_i}^{(i)}(\varsigma_0,\ldots,\varsigma_a)=0,\ i=0,\ldots,m$$

où

$$\varsigma_i=\frac{\theta^*_i}{H(\xi)}=\frac{\sum_{k=0}^{m}\psi_{k,m-a+i}(\xi)\,\eta_{ik}}{H(\xi)},\quad H(\xi)\equiv|\equiv 0\,(\mathfrak{P}).$$

Q. e. d.

Théorème 3.10. Pour que la sous-variété irreductible $\mathfrak{P}$ soit non fondamentale, est necessaire et suffisant qu'on puisse déterminer les (ς) *du Th. 1.9 tels que* $H(\xi)\equiv|\equiv 0\,(\mathfrak{P})$.

Démonstration. Que la condition est nécessaire, on vient de le prouver dans le Th. précédent.

La condition est suffissante. En effet, si on verifie :

$$\eta_i^{\rho_i}+d_1^{(i)}(\varsigma)\,\eta_i^{\rho_i-1}+\ldots+d_{\rho_i}^{(i)}(\varsigma)=0,\quad i=0,\ldots,m,$$

$$\varsigma_j=\frac{\theta^*_j}{H(\xi)},\qquad H(\xi)\equiv|\equiv 0\,(\mathfrak{P}),\quad j=0,\ldots,a,$$

on a $H(\bar{\xi})\neq 0$ et

$$H(\bar{\xi})\,\bar{\eta}_i^{\rho_i}+d_1^{(i)}(\bar{\xi},\bar{\theta})\,\bar{\eta}_i^{\rho_i-1}+\ldots+d_{\rho_i}^{(i)}(\bar{\theta})=0,\quad i=0,\ldots,m,$$

donc, grad. trans. $[k(\bar{\xi},\bar{\eta}):k(\bar{\xi})]<a+1$ et, par le Th. 1.10, grand. trans. $[k(\bar{\xi};\bar{\eta}):k(\bar{\xi})]=a+1$.

Q. e. d.

Exemple. Soit la transformation algébrique, entre une droite et la surface conique de second ordre, définit par la variété double :

$$\mathfrak{V}=\begin{cases}\xi_1\eta_0-\xi_0\eta_1=0\\ \eta_1^2-\eta_2\eta_3=0\end{cases}$$

L'idéal (η_2,η_3) est irrelevant dans $\mathfrak{U}=k(\xi_0,\xi_1)[\eta_0,\ldots,\eta_3]$ donc, (Th. 1.9) en mettant $\theta_0=\eta_2$, $\theta_1=\eta_3$ on a

$$\begin{cases}\eta_0^2=\xi_0^2\,\varsigma_0\,\varsigma_1\\ \eta_1^2=\xi_1^2\,\varsigma_0\,\varsigma_1\\ \eta_2=\xi_1\ \varsigma_0\\ \eta_3=\xi_1\ \varsigma_1\end{cases}\qquad \varsigma_0=\frac{\eta_2}{\xi_1},\quad \varsigma_1=\frac{\eta_3}{\xi_1},\quad H=\xi_1.$$

Considérons la sous-variété de V definie par $\mathfrak{P}=(\xi_1)$; les d.p.m. de $P^*(\xi_1)$ que gissent sur $\mathfrak{P}$ sont (ξ_1, η_1, η_2) et (ξ_1, η_1, η_3). Prenons le prémièr de ceux-ci, on a: grad. trans. $[P^*/(\xi_1, \eta_1, \eta_2) : P/(\xi_1)]=2$, donc, $\mathfrak{P}$ est non fondamentale et cependant) $H(\xi)=\xi_1\equiv 0\,(\mathfrak{P})$. Les éléments η_0, $\eta_2+\eta_3$ sont tels que $(\eta_0, \eta_2+\eta_3)$ est irrelevant dans $\mathfrak{U}$ et satisfont les conditions du Th. 2.10, d'où nous mettons $\zeta_0=\dfrac{\theta_0}{\xi_0}=\dfrac{\eta_0}{\xi_0}$ et $\zeta_1=\theta_1=\eta_2+\eta_3$ on a

$$\begin{cases} \eta_0 = \xi_0\,\zeta_0 \\ \eta_1 = \xi_1\,\zeta_0 \\ \eta_2{}^2 - \zeta_1\,\eta_2 + \xi_1{}^2\,\zeta_0{}^2 = 0 \\ \eta_3{}^2 - \zeta_1\,\eta_3 + \xi_1{}^2\,\zeta_0{}^2 = 0 \end{cases}$$

òu $H(\xi)=\xi_0 \not\equiv 0\,(\mathfrak{P})$ que s'accorde avec le Th. 2.10.

§ 11. Rélations entre les variétés $\mathfrak{V}$ et V_1^* (V_2^*).

Lemme 1.11. *Si $\mathfrak{P}^*$ est un idéal prémier et bihomogène de P^*, dont les idéals contractés à P et P′ ne sont pas irrelevants, il-y-a une évaluation v^* de Ω avec centre $\mathfrak{P}^*$ dans $\mathfrak{V}$ qui a son centre à distance finie sur V_1^* (V_2^*) et tel que min.*

$$\{v^*(\xi_0), \ldots, v^*(\xi_n)\}=0, \quad (\min. \{v^*(\eta_0), \ldots, v^*(\eta_m)\}=0).$$

Démonstration. Soient ξ_0 et η_0 les éléments que n'appartiennent pas à $\mathfrak{P}^*$, et $\mathfrak{p}^*$ l'idéal non homogène de $\mathfrak{o}^*$ correspondant à $\mathfrak{P}^*$ (Prop. 2.6). Soit $v^{*\prime}$ une évaluation de K^* avec centre $\mathfrak{p}^*$. Avec l'emploi des notations du Th. 1.9 on a que l'anneau $R_{v^{*\prime}}\left[\xi_0, \dfrac{1}{\xi_0}, \dfrac{\eta_0}{H(\xi)}\right]$ ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de $R_{v^{*\prime}}$, puisque ξ_0 est algébriquement indépendante sur K^* et η_0 l'est sur $K^*(\xi_0)$. Il-y-a alors ([1], Th. 6), un anneau d'évaluation, R_{v^*}, de Ω qui contiennt à $R_{v^{*\prime}}\left[\xi_0, \dfrac{1}{\xi_0}, \dfrac{\eta_0}{H(\xi)}\right]$ et ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de $R_{v^{*\prime}}$. D'òu on déduit que $R_{v^*}\cap K^*=R_{v^{*\prime}}$, donc v^* est une extension de $v^{*\prime}$ et, par la démonstration de la Prop. 4.7, le centre de v^* sur $\mathfrak{V}$ est $\mathfrak{P}^*$. En outre, comme ξ_0 et $\dfrac{1}{\xi_0}$ appartiennent à R_{v^*}, on a $v^*(\xi_0)=0$ et comme $\mathfrak{o}^* \subseteq R_{v^{*\prime}}$, $v^*(\xi_i) = v^{*\prime}\left(\frac{\xi_i}{\xi_0}\right) + v^*(\xi_0) \geqslant 0$ d'òu $v^*(H) \geqslant 0$ et $v^*(\eta_{i0}) = v^*\left(\frac{\eta_{i0}}{H}\right) + v^*(H) \geqslant 0$ finalément,

$$v^*(\eta_{ij}) = v^{*\prime}\left(\frac{\eta_{ij}}{\eta_{i0}}\right) + v^*(\eta_{i0}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v^*(\zeta_k) = v^*\left(\Sigma\, \varphi_{ik}\left(\frac{\xi_i}{\xi_0}, \frac{\eta_{ik}}{\eta_{i0}}\right)\right) + $$
$$+ v^*\left(\frac{\eta_{i0}}{H}\right) + v^*(\xi_0^{\,\mu_1}) \geqslant 0.$$

Q. e. d.

Lemme 2.11. Si $\mathfrak{P}^*$ est un idéal prémièr et bihomogène de P^* tel que $H(\xi)$, ξ_0, $\eta_0 \equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$, il-y-a une évaluation, v^*, de Ω avec son centre $\mathfrak{P}^*$ dans $\mathfrak{V}$ pour laquelle

$$\min.\,\{v^*(\xi_0), \ldots, v^*(\xi_n)\} = v^*(\xi_0) = 0,$$
$$\min.\,\{v^*(\eta_{i0}), \ldots, v^*(\eta_{im})\} = v^*(\eta_{i0}) = 0,$$

et qui a un centre à distance finie sur V_1^*.

Démonstration. Soit μ le degré de la forme $H(\xi)$ et posons $H(\xi) = \xi_0^{\,\mu} H(\xi')$, $\xi_i' = \frac{\xi_i}{\xi_0}$, $i = 1, \ldots, n$. Comme dans le lemme precedent, nous appellons $v^{*\prime}$ à une évaluation de K^* avec son centre dans l'idéal non homogène, $\mathfrak{p}^*$, correspondant à $\mathfrak{P}^*$. L'anneau $R_{v^{*\prime}}\left[\xi_0, \frac{1}{\xi_0}, \frac{\eta_{i0}}{H}, \frac{1}{\eta_{i0}}\right]$ ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de $R_{v^{*\prime}}$. En effect, de $H \equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ il resulte $H(\xi') \equiv\!\!|\!\!\equiv (\mathfrak{p}^*)$ et $v^{*\prime}(H(\xi')) = 0$, $\frac{1}{H(\xi')} \in R_{v^{*\prime}}$. S'il y avait une non unité, p, de $R_{v^{*\prime}}$ contenue dans le dit anneau, on aurait, à cause de la indépendance algébrique de ξ_0 et η_0 sur K^*, que $\frac{1}{p} = F\left(\frac{1}{H(\xi')}\right)$ où les coéfficients de F appartiendraient à $R_{v^{*\prime}}$. D'ici on déduirait que $H^p(\xi') = p\,G \equiv 0\,(\mathfrak{p}_{v^{*\prime}})$, d'òu $\frac{1}{H(\xi')} \notin R_{v^{*\prime}}$; contradiction. Il-y-a, par consequent, une évaluation, v^*, de Ω dont l'anneau d'évaluation, R_{v^*}, contient à $R_{v^{*\prime}}\left[\xi_0, \frac{1}{\xi_0}, \frac{\eta_{i0}}{H(\xi')}, \frac{1}{\eta_{i0}}\right]$ et ne contient pas l'inverse d'aucune non unité de $R_{v^{*\prime}}$. De ceci il résulte que $R_{v^*} \cap K^* = R_{v^{*\prime}}$, et pourtant le centre de v^* sur $\mathfrak{V}$ est $\mathfrak{P}^*$. De ξ_0, $\frac{1}{\xi_0} \in R_{v^*}$ on déduit que $v^*(\xi_0) = 0$; de $\frac{\eta_{i0}}{H(\xi')} \in R_{v^*}$ on en tire que $v^{*}\left(\frac{\eta_{i0}}{H(\xi')}\right) = v^{*}(\eta_{i0}) - v^{*'}(H(\xi')) \geqslant 0$ et, comme $v^{*'}(H(\xi')) = 0$ et $\frac{1}{\eta_{i0}} \in R_{v^*}$, on a que $v^{*}(\eta_{i0}) = 0$. En outre

$$v^{*}(\eta_{i}) = v^{*'}\left(\frac{\eta_{i}}{\eta_{i0}}\right) + v^{*}(\eta_{i0}) \geqslant 0, \quad v^{*}(\varsigma_{k}) = v^{*}(\Sigma \varphi_{ik}(\xi)\eta_{i}) - v^{*}(H(\xi)) \geqslant 0.$$

Q. e. d.

<u>Théorème 1.11.</u> *Si* W *est une sous-variété irreductible et non fondamentale de* V *et on trouvent les* (ς) *d'accord avec le Th.* 2.10, *on verifie que tout idéal minime prémièr de* $P^{*}\mathfrak{P}$ *que git sur* $\mathfrak{P}$ *est centre dans* $\mathfrak{B}$ *de toute évaluation de* Ω *dont le centre dans* V_1^{*} *est un certain diviseur prémièr minime de* $P_1^{*}\mathfrak{P}$ (que nous appellerons *asocié* de celui).

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}^{*}$ un idéal premièr minime de $P^{*}\mathfrak{P}$ que git sur $\mathfrak{P}$; comme, par hypothèse, $\mathfrak{P}$ n'est pas l'irrelevant, existent une (ξ) et une (η), que nous appellerons ξ_0 et η_0 respectivement, tels que $\xi_0, \eta_0 \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{P}^{*})$. En raison de l'hypothèse et du lemme précédent, il-y-a une évaluation, v^{*}, de Ω avec le centre $\mathfrak{P}^{*}$ dans $\mathfrak{B}$ tel que $v^{*}(\xi_0) = v^{*}(\eta_0) = 0$ et que $P_1^{*} \subseteq R_{v^*}$. Soit $\mathfrak{p}^{**}$ l'idéal de P_1^{*} que définit le centre de v^{*} sur V_1^{*}. Par le L. 1.7 et la Prop. 2.5, $\mathfrak{p}^{**}$ divise un d.p.m., $\mathfrak{p}^{*}$, de $P_1^{*}\mathfrak{P}$. Comme $\xi_0, \eta_0 \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{**})$ on a que $\xi_0, \eta_0 \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{*})$. Soit $\bar{v}^{*}$ une évaluation *arbitraire* de Ω avec le centre $\mathfrak{p}^{*}$ dans V^{*} et soit $\bar{\mathfrak{P}}^{*}$ son centre dans $\mathfrak{B}$. Comme $\bar{v}^{*}(\xi_0) = \bar{v}^{*}(\eta_0) = 0$, $\bar{\mathfrak{P}}^{*}$ est engendré par toutes les formes bihomogènes de $\mathfrak{p}^{*}$ et comme $\mathfrak{P}^{*}$ l'est par celles de $\mathfrak{p}^{**}$ il résulte que $\bar{\mathfrak{P}}^{*} \leqslant \mathfrak{P}^{*}$. Or, comme $\mathfrak{p}^{*} \cap P = \mathfrak{P}$, v^{*} est une extension d'une évaluation de Σ avec le centre $\mathfrak{P}$ et, par la Prop. 2.7, $\bar{\mathfrak{P}}^{*}$ divise un d.p.m. de $P^{*}\mathfrak{P}$, et alors $\mathfrak{P}^{*} = \bar{\mathfrak{P}}^{*}$.

Q. e. d.

<u>Théorème 2.11.</u> *Si la sous-variété definie par l'idéal prémier et homogène* $\mathfrak{P}$ *est non fondamentale, on peut trouver les* (ς) *de façon qu'aucun d.p.m. de* $P_1^{*}\mathfrak{P}$ *git sur l'idéal irrelevant de* P'.

Démonstration. En determinant les (ς) d'accord avec le Th. 2.10, on a $H(\xi) \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{P})$ et si $\mathfrak{p}^{*}$ est un d.p.m. de $P_1^{*}\mathfrak{P}$, comme, pour être $\bar{P}$ intégrement fermé et P_1^{*} intégrement dépendant de $\bar{P}$, les idéals prémièrs minimes de $P_1^{*}\mathfrak{P}$ gissent sur $\mathfrak{P}$, on a que

$\varsigma_i \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}^*)$, et comme, pour être $\theta_i = H\,\varsigma_i$ et $H \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}^*)$ on a que $\theta_i \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}^*)$ il resulte que pas toutes les (η) appartiennent à $\mathfrak{p}^*$.

Q. e. d.

Corollaire. Si W est une sous-variété irreductible et non fondamentale de V et on a déterminé les (ς) d'accord avec le Th. 2.10, on verifie que toutes les évaluations de Ω avec son centre dans un d.p.m. de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ elles ont le même centre dans $\mathfrak{B}$.

Ce centre est celui engendré par toutes les formes bihomogènes du d.p.m. de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ consideré.

§ 12. Sous-variétés régulières par rapport d'une transformation algébrique.

De la def. 1.10 et du Th. 3.10 on déduit ce qui suit:

Théorème 1.12. *Une condition necessaire et suffisante pour que la sous-variété definie par l'idéal prémièr et homogène $\mathfrak{P}$ soit régulier par rapport de la composante $\mathfrak{P}_i'$ c'est qu'on peut trouver les (ς) et les (ς') de façon que $H \equiv\mid\equiv 0(\mathfrak{P})$ et $H'(\eta) \equiv\mid\equiv 0(\mathfrak{P}_i')$.*

Soit W une sous-variété irreductible de V, régulière par rapport de la composante W_i', soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_i'$ les idéals correspondants à ces sous-variétés et $\mathfrak{P}^*$ le d.p.m. de $P^*\,\mathfrak{P}$ tel que $\mathfrak{P}^* \cap P = \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}^* \cap P' = \mathfrak{P}_i'$. Alors on aura $\mathfrak{P}^* \supseteq P^*\,\mathfrak{P}_i'$, d'òu $\mathfrak{P}^*$ divise un d.p.m., $\mathfrak{P}^{*\prime}$, de $P^*\,\mathfrak{P}_i'$. On a ce qui suit:

Théorème 2.12. a) *Si $\mathfrak{P}^{*\prime} = \mathfrak{P}^*$ on a que*

$$\dim.(\mathfrak{P}_i') = \dim.(\mathfrak{P}) + a - b$$

b) $$Si\ \ \mathfrak{P}^{*\prime} \subset \mathfrak{P}^*\ \ et\ \ \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^{*\prime} \cap \mathfrak{P}$$

on a $\dim.(\mathfrak{P}) + a - b < \dim.(\mathfrak{P}_i') < \dim.(\mathfrak{P}_1) + a - b.$

Démonstration. Par l'hypothèse et le Th. anterieur, on peut trouver les $\varsigma_i = \dfrac{\theta_i}{H(\xi)}$, $\varsigma_j' = \dfrac{\theta_j'}{H'(\eta)}$, $i = 0, \ldots, a$, $j = 0, \ldots, b$, tels que $H(\xi) \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{P})$, $H'(\eta) \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{P}_i')$.

a) $\mathfrak{P}^{*\prime} = \mathfrak{P}^*$. Soit $\mathfrak{B}_A$ la variété de l'espace afin A_{n+m+2} définie par le point général $(\xi_0, \ldots, \xi_n\,;\,\eta_0, \ldots, \eta_m)$ et W la sous-variété de $\mathfrak{B}_A$ définie par l'idéal $\mathfrak{P}^*$. Soit v une évaluation de Ω avec centre W dans $\mathfrak{B}_A$, alors on aura $P^* \subseteq R_v$ et, comme $\mathfrak{P}^*$ est bihomogène, il resulte que si $v(f(\xi\,;\,\eta)) > 0$ toutes les composantes bihomogènes de $f(\xi\,;\,\eta)$ ont une valeur plus grande que zéro dans v. De $H(\xi)$, $H'(\eta) \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ il resulte que $v(H(\xi)) = v(H'(\eta)) = 0$ et comme $P^* \subseteq R_v$ sera $v(\varsigma_i) = v\left(\frac{\theta_i}{H}\right) = v(\theta_i) \geqslant 0$, $v(\varsigma_j') = v(\theta_j') \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, a$, $j = 0, \ldots, b$ et $P_1^* \subseteq R_v$, $P_2^* \subseteq R_v$, donc les centres de v dans V_1^* et V_2^* sont à distance finie. Soient $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ les idéals prémiers de P_1^* et P_2^* qui définent ces centres, alors $P_1^*\,\mathfrak{P}^* \subseteq \mathfrak{p}_1$ et $P_2^*\,\mathfrak{P}^* \subseteq \mathfrak{p}_2$, d'òu $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap P \subseteq \subseteq P_1^*\mathfrak{P}^* \cap P \subseteq \mathfrak{p}_1 \cap P$ et $P_1^*\,\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{p}_1$, donc, il existe un d.p.m., $\mathfrak{p}_1^*$, de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ tel que $\mathfrak{p}_1^* \subseteq \mathfrak{p}_1$. Tout à fait semblable, il existe un d.p.m., $\mathfrak{p}_2^*$, de $P_2^*\,\mathfrak{P}$ tel que $\mathfrak{p}_2^* \subseteq \mathfrak{p}_2$. Or, par le Th. 1.11, il-y-a des évaluations v^* et $v^{*\prime}$ de Ω avec centres dans les diviseurs minimes prémièrs, $\bar{\mathfrak{p}}^*$ et $\bar{\mathfrak{p}}^{*\prime}$ de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ et $P_2^*\,\mathfrak{P}'$, respectivement, associés à l'idéal $\mathfrak{P}^*$ de P^*. Comme on voit dans la démonstration du Th. mentionné, il-y-a une (ξ) et une (η), que nous appellerons ξ_0 et η_0, respectivement, tels que ξ_0, $\eta_0 \equiv\mid\equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}}^*)$; alors $\mathfrak{P}^*$ est engendré par toutes les formes bihomogènes de $\bar{\mathfrak{p}}^*$. Soit $f(\xi\,;\,\varsigma\,;\,\eta)$ un élément arbitraire de $\mathfrak{p}_1$, alors $v(f(\xi\,;\,\varsigma\,;\,\eta)) > 0$ et par substitution au lieu des (ς), leurs expressions du principe, on a $f(\xi\,;\,\varsigma\,;\,\eta) = \dfrac{F(\xi;\,\eta)}{H^\rho(\xi)}$ et comme $v(H) = 0$ sera $v(F(\xi\,;\,\eta)) > 0$, donc $F(\xi;\,\eta) \equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ d'òu $v^*(F(\xi;\,\eta)) > 0$ et comme $H \equiv\mid\equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}}^*)$, $v^*(H) = 0$ il resulte $v^*\left(\dfrac{F}{H^\rho}\right) = v^*(f(\xi;\,\varsigma;\,\eta)) > 0$ et $f(\xi;\,\varsigma;\,\eta) \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}^*)$ d'où $\mathfrak{p}_1 \subseteq \bar{\mathfrak{p}}^*$ mais, comme $\mathfrak{p}_1^*$ et $\bar{\mathfrak{p}}^*$ sont diviseurs prémiers minimes de $P_1^*\,\mathfrak{P}$ on a $\mathfrak{p}_1^* = \mathfrak{p}_1 = \bar{\mathfrak{p}}^*$. Analoguement, on trouve $\mathfrak{p}_2^* = \mathfrak{p}_2 = \bar{\mathfrak{p}}^{*\prime}$.

D'ici il resulte que les sous-variétés de V_1^* et V_2^* definies par $\mathfrak{p}_1^*$ et $\mathfrak{p}_2^*$ sont homologues dans la correspondance birrationnelle entre V_1^* et V_2^*. Nous allons voir que ces sous-variétés sont régulières par rapport à cette correspondance. Soit, en effet, $\dfrac{f(\xi;\,\varsigma;\,\eta)}{g(\xi;\,\varsigma;\,\eta)}$ un élément arbitraire de $P_1^*\mathfrak{p}_1^*$; faisant la substitution des (ς) par les expressions (1) du Th. 1.9, on a $\dfrac{f(\xi;\,\varsigma;\,\eta)}{g(\xi;\,\varsigma;\,\eta)} = \dfrac{F(\xi;\,\eta)}{G(\xi;\,\eta)} H^\sigma(\xi)$ étant σ un nombre rationnel entièr. De $g \equiv\mid\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1^*)$

on déduit $v(g)=v(G)=0$, donc $G(\xi\,;\,\eta)\,\equiv\!\!|\!\!\equiv 0\,(\mathfrak{p}^*_2)$ et alors $\dfrac{f}{g}=$ $=\dfrac{F}{G}H^{\sigma}\in P^*_{2\,\mathfrak{p}^*_2}$ c'est à dire $\mathfrak{P}^*{}_{1\,\mathfrak{p}^*_1}\subseteq P^*{}_{2\,\mathfrak{p}^*_2}$. On trouve analoguement $P^*{}_{2\,\mathfrak{p}^*_2}\subseteq P^*{}_{1\,\mathfrak{p}^*_1}$, donc $P^*{}_{1\,\mathfrak{p}^*_1}=P^*{}_{2\,\mathfrak{p}^*_2}$.

On déduit de ceci:

$$\dim.(\mathfrak{p}_1^*)=\dim.(\mathfrak{p}_2^*) \tag{1}$$

Or, étant V et V′ normaux dans leurs respectifs espaces projectifs, P et P′ sont intégrement férmés et, alors, aussi le sont $\bar{P}$ et $\bar{P}'$ et comme P_1^* et P_2^* dépendent intégrement de $\bar{P}$ et $\bar{P}'$, respectivement, on a (Ths. 7 et 9, [2]) que

$$\mathfrak{p}^*_1\cap\bar{P}=\bar{P}\,\mathfrak{P},\quad \mathfrak{p}^*_2\cap\bar{P}'=\bar{P}'\,\mathfrak{P}_1$$

et

$$\dim.(\bar{P}\,\mathfrak{P})=\dim.(\bar{P}'\,\mathfrak{P}_1') \tag{2}$$

Puisque les (ξ) sont algébriquement indépendants sur Σ, on a

$$\dim.(\bar{P}\,\mathfrak{P})=\dim.(\mathfrak{P})+a+1$$

et, analoguement,

$$\dim.(\bar{P}'\,\mathfrak{P}_1')=\dim.(\mathfrak{P}_1')+b+1$$

donc

$$\dim.(\mathfrak{P}_1')=\dim.(\mathfrak{P})+a-b \tag{3}$$

b) $\mathfrak{P}^{*\prime}\subset\mathfrak{P}^*$. Soient W′ et W les sous-variétés de $\mathfrak{V}_\lambda$ representées par $\mathfrak{P}^{*\prime}$ et $\mathfrak{P}^*$ respectivement, et v une évaluation de Ω avec le centre en W sur $\mathfrak{V}_\lambda$ et composée avec une autre évaluation v' du même corps avec le centre W′ sur $\mathfrak{V}_\lambda$. Comme dans le cas précedent on démontre que

$$v(H(\xi))=v(H'(\eta))=v'(H(\xi))=v'(H'(\eta))=0,$$
$$P^*_1\subseteq R_{v'},\quad P^*_2\subseteq R_{v'},\quad P^*_1\subseteq R_v.\quad P^*_2\subseteq R_v.$$

Soient alors $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_1'$ et $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2'$ les centres de v et v' sur V_1^* et V_2^* respectivement. Comme v est composée avec v' on aura $\mathfrak{p}_1'\subseteq\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2'\subseteq\mathfrak{p}_2$ et, comme par la définition de v et v' on vérifie

$$\mathfrak{P}^{*\prime}=\mathfrak{p}'_1\cap P^*=\mathfrak{p}'_2\cap P^*,\quad \mathfrak{P}^*=\mathfrak{p}_1\cap P^*=\mathfrak{p}_2\cap P^*,$$

on a $$\mathfrak{p}'_1\subset\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{p}'_2\subset\mathfrak{p}_2.$$

Comme dans le cas anterieur on démontre que:

1). Il y a un diviseur p. m., $\mathfrak{p}^*{}'_1$, de $P^*_1\,\mathfrak{P}_1$ tel que $\mathfrak{p}^*{}_1\subseteq\mathfrak{p}'{}_1$ $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}^{*\prime}\cap P$.

2) Il y a un d. p. m., $\mathfrak{p}^{*\prime}_2$, de $P^*_2 \mathfrak{P}_1'$ tel que $\mathfrak{p}^{*\prime}_2 = \mathfrak{p}'_2$

3) » » » $\mathfrak{p}^*_1$ » $P^*_1 \mathfrak{P}$ » $\mathfrak{p}^*_1 = \mathfrak{p}_1$

4) » » » $\mathfrak{p}^*_2$ » $P^*_2 \mathfrak{P}_1'$ » $\mathfrak{p}^*_2 \subseteq \mathfrak{p}_2$

On a, pour tant, que

$$\mathfrak{p}^{*\prime}_1 \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}^*_1, \quad \mathfrak{p}^{*\prime}_2 = \mathfrak{p}'_2 \subset \mathfrak{p}_2, \quad \mathfrak{p}^*_2 \subset \mathfrak{p}_2. \qquad [4]$$

Aussi on démontre comme dans le cas anterieur que, les sous-variétés $\mathfrak{p}_1'$ et $\mathfrak{p}_2'$, homologues dans la correspondance birrationnelle entre V_1^* et V_2^*, sont régulières par rapport à cette correspondance et la même chose a lieu pour les sous-variétés $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$; pour tant, on a $P^*_{1\mathfrak{p}'_1} = P^*_{2\mathfrak{p}'_2}$ et $P^*_{1\mathfrak{p}_1} = P^*_{2\mathfrak{p}_2}$ d'òu il résulte que

$$\dim.(\mathfrak{p}'_1) = \dim.(\mathfrak{p}'_2), \quad \dim.(\mathfrak{p}_1) = \dim.(\mathfrak{p}_2). \qquad [5]$$

D'autre part, de $\mathfrak{p}_2' = \mathfrak{p}_2^{*\prime}$, et pour être celui-ci d.p.m. de $P_2^* \mathfrak{P}_1'$, on deduit

$$\dim.(\mathfrak{p}'_2) = \dim.(\mathfrak{p}^{*\prime}_2) = [\dim.(\mathfrak{P}_1') + 1] + b + 1. \qquad [6]$$

Analoguement on a :

$$\dim.(\mathfrak{p}_1) = \dim.(\mathfrak{p}^*_1) = [\dim.(\mathfrak{P}) + 1] + a + 1, \qquad [7]$$

$$\dim.(\mathfrak{p}^{*\prime}_1) = [\dim.(\mathfrak{P}_1) + 1] + a + 1, \qquad [8]$$

et

$$\dim.(\mathfrak{p}^{*\prime}_2) = [\dim.(\mathfrak{P}'_1) + 1] + b + 1. \qquad [9]$$

De (4), (5), (6) et (7) on en tire

$$\dim.(\mathfrak{P}_1') + b + 2 > \dim.(\mathfrak{P}) + a + 2;$$

de (4), (8) et (9) on déduit

$$\dim.(\mathfrak{P}_1) + a + 2 \geqslant \dim.(\mathfrak{P}_1') + b + 2,$$

et de ces deux dérnières

$$\dim.(\mathfrak{P}) + a - b < \dim.(\mathfrak{P}_1') \leqslant \dim.(\mathfrak{P}_1) + a - b.$$

Q. e. d.

Corollaire. Si $\mathfrak{P}^{*\prime}$ *est un d.p.m. de* $P^* \mathfrak{P}_1$, *on a* $\dim.(\mathfrak{P}_1') = \dim.(\mathfrak{P}_1) + a - b$.

Exemple. Soit la correspondance algébrique de l'example du § 10. Nous prenons dans celle-là comme variété originale, V, le cône et comme variété imâge la droite. Alors on a : $a=0$ et $b=1$.

1. Soit

$$\mathfrak{P}=(\eta_1-m\,\eta_0,\ m^2\eta_0-n\,\eta_3,\ \eta_2-n\,\eta_0),$$
$$\mathfrak{P}^*=(\eta_1-m\,\eta_0,\ m^2\eta_0-n\,\eta_3,\ \eta_2-n\,\eta_0,\ \xi_1-m\,\xi_0),$$

alors on a

$$\mathfrak{P}'=(\xi_1-m\,\xi_0),\quad \mathfrak{P}^{*\prime}=(\xi_1-m\,\xi_0,\ \eta_1-m\,\eta_0)\subset\mathfrak{P}^*,\quad \mathfrak{P}_1=(\eta_1-m\,\eta_0),$$
$$\dim.(\mathfrak{P}')=0$$

et, comme $\mathfrak{P}^{*\prime}$ est d.p.m. de $P^*\mathfrak{P}_1$, le corollaire anterieur donne $\dim.(\mathfrak{P}')=\dim.(\mathfrak{P}_1)+a-b=0$.

2. Soit

$$\mathfrak{P}=(\eta_1-m\,\eta_0),\quad \mathfrak{P}^*=(\eta_1-m\,\eta_0,\ \xi_1-m\,\xi_0),\quad \mathfrak{P}'=(\xi_1-m\,\xi_0),$$

alors on a

$$\mathfrak{P}^{*\prime}=(\xi_1-m\,\xi_0,\ \eta_1-m\,\eta_0)=\mathfrak{P}^*,\quad \dim.(\mathfrak{P}')=0,$$

et la prémièr partie du théorème anterieur donne

$$\dim.(\mathfrak{P}')=\dim.(\mathfrak{P})+0-1=0.$$

3. Soient

$$\mathfrak{P}=(\eta_3-m^2\eta_2,\ \eta_1-m\,\eta_2),\quad \mathfrak{P}^*=(\eta_3-m^2\eta_2,\ \eta_1-m\,\eta_2);$$

alors

$$\mathfrak{P}'=(0),\quad \mathfrak{P}^{*\prime}=(0)\subset\mathfrak{P}^*,\quad \mathfrak{P}_1=0,\quad P^*\mathfrak{P}_1=(0=\mathfrak{P}^{*\prime},\quad \dim.(\mathfrak{P}')=1,$$

et le corollaire anterieur donne

$$\dim.(\mathfrak{P}')=\dim.(\mathfrak{P}_1)+0-1=1.$$

Nous considerons maintenant la transformation inverse de la transformation anterieur ; alors $a=1$, $b=0$.

4. Soient

$$\mathfrak{P}=(\xi_1-t\,\xi_0),\quad \mathfrak{P}^*=(\xi_1-t\,\xi_0,\ \eta_1-t\,\eta_0)$$

alors

$$\mathfrak{P}' = (\tau_1 - t\,\tau_0), \quad \mathfrak{P}^{*\prime} = (\tau_1 - t\,\tau_0,\ \xi_1 - t\,\xi_0) = \mathfrak{P}^*$$

et, par la prémière partie du th. precedent, on a

$$\dim.(\mathfrak{P}') = \dim.(\mathfrak{P}) + a - b = 1.$$

Théorème 3.12. *Si* b=0 *et* W *est régulièr par rapport à* W_1', *on a que* $\mathfrak{P}^{*\prime} = \mathfrak{P}^*$.

Démonstration. Des hypothèses on déduit qu'il y a un unique $\zeta' = \dfrac{\theta'}{H'(\tau_i)}$. Comme $\mathfrak{P}^*$ ne contiennt pas tous les (τ_i), on peut imposer en outre des conditions *a*)-*e*) du Th. 2.10, la condition $\theta' \equiv\!\mid\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$. Alors, le mentionné Th. donne ζ' tel que $H'(\tau_i) \equiv\!\mid\!\equiv 0(\mathfrak{P}_1')$ et, a fortiori,

$$H'(\tau_i) \equiv\!\mid\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^{*\prime}), \quad H'(\tau_i) \equiv\!\mid\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*).$$

Nous représenterons par (H′) l'ensemble de tous, les puissances d'exposant rationnelle entier pas négatif de H′. Cet ensemble est multiplicativement fermé. Nous pourrons former, par consequent, l'anneau des quotients $P^*_{(H')}$. Evidément $P^*_2 = P^*[\zeta'] \subset P^*_{(H')}$. Or, comme $H' \equiv\!\mid\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ et $H' \equiv\!\mid\!\equiv 0\,(\mathfrak{P}^{*\prime})$ les idéals $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^*$ et $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime}$ sont prémiers et $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^* \cap P^* = \mathfrak{P}^*$, $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^* = \mathfrak{P}^{*\prime}$. De $\mathfrak{P}^{*\prime} \subseteq \mathfrak{P}^*$ il resulte que $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \subseteq P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^*$ et $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^*_2 \subseteq$ $\subseteq P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^* \cap P^*_2$ et, comme ces idéals sont prémièrs,

$$\dim.(P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^*_2) \geq \dim.(P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^* \cap P^*_2).$$

Par brièveté, nous poserons:

$$\mathfrak{p}^{*\prime}_2 = P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^*_2, \quad \mathfrak{p}^*_2 = P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^* \cap P^*_2$$

et alors

$$\dim.(\mathfrak{p}^{*\prime}_2) \geqslant \dim.(\mathfrak{p}^*_2). \tag{1}$$

Or,

$$\mathfrak{p}^{*\prime}_2 \cap P' = [(P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^*_2) \cap P^*] \cap P' = (P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime} \cap P^*) \cap P' = \mathfrak{P}_1';$$

et, analoguement, $\mathfrak{p}^*_2 \cap P' = \mathfrak{P}_1'$.

Mais,

$$\mathfrak{p}^{*\prime}_2 \cap P' = (\mathfrak{p}^{*\prime}_2 \cap \bar{P}') \cap P' = \bar{\mathfrak{p}}'_2 \cap P', \quad \text{où} \quad \bar{\mathfrak{p}}'_2 = \mathfrak{p}^{*\prime}_2 \cap \bar{P}'.$$

Si nous posons $\bar{\mathfrak{p}}_2 = \mathfrak{p}_2^* \cap \bar{P}'$, on a $\mathfrak{p}_2^* \cap P' = \bar{\mathfrak{p}}_2 \cap P'$. Comme P_2^* est intégrement dépendant de $\bar{P}'$, on a ([2], Th. 7)

$$\dim.(\mathfrak{p}^{*\prime}_2) = \dim.(\bar{\mathfrak{p}}'_2), \quad \dim.(\mathfrak{p}^*_2) = \dim.(\bar{\mathfrak{p}}_2),$$

et, en raison de (1),

$$\dim.(\bar{\mathfrak{p}}'_2) \geq \dim.(\bar{\mathfrak{p}}_2)$$

Par un autre coté, de $\bar{\mathfrak{p}}_2' \cap P' = \mathfrak{P}_1'$ il resulte $\bar{\mathfrak{p}}'_2 \supseteq \bar{P}' \mathfrak{P}_1'$ et

$$\dim.(\bar{\mathfrak{p}}'_2) \leqslant \dim.(\bar{P}' \mathfrak{P}_1') = \dim.(\mathfrak{P}_1') + 1.$$

Analoguement :

$$\dim.(\bar{\mathfrak{p}}_2) \leqslant \dim.(\bar{P}' \mathfrak{P}_1') = \dim.(\mathfrak{P}_1') + 1.$$

Nous allons prouver maintenant que ς' *est algébriquement indépendant sur* Σ' *mod.* $\bar{\mathfrak{p}}_2$. En effet, s'il y aurait une rélation de la forme

$$\varphi_0(\eta)\varsigma'^{\beta} + \varphi_1(\eta)\varsigma'^{\beta+\alpha_1} + \ldots + \varphi_r(\eta)\varsigma'^{\beta+\alpha_r} \equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2)$$

et pas tous les coefficients, φ_i, appartiennent à $\bar{\mathfrak{p}}_2$, on pourrait faire abstraction de tous les tèrmes dont les coefficients appartiennent à $\bar{\mathfrak{p}}_2$, et, par consequent, nous pourrions supposer que $\varphi_i(\eta) \equiv\mid\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2)$, $i=0, \ldots, r$. Comme $\theta' \equiv\mid\equiv 0(\mathfrak{P}^*)$ il résulte que $\varsigma' = \frac{\theta'}{H'} \equiv\mid\equiv 0(P^*_{(H')}\mathfrak{P}^*)$ et alors $\varsigma' \equiv\mid\equiv 0(\bar{\mathfrak{p}}_2)$, donc

$$\varphi_0(\eta) + \varphi_1(\eta)\varsigma'^{\alpha_1} + \ldots + \varphi_r(\eta)\varsigma'^{\alpha_r} = 0(\bar{\mathfrak{p}}_2)$$

et, par consequent,

$$\varphi_0 + \ldots + \varphi_r(\eta)\varsigma'^{\alpha_r} \equiv 0(P^*_{(H')}\mathfrak{P}^*);$$

donc, si nous posons

$$\varphi_0(\eta) + \ldots + \varphi_r(\eta)\varsigma'^{\alpha_r} = \frac{\varphi_0 H'^{\alpha_r} + \varphi_1\theta'^{\alpha_1}H'^{\alpha_r-\alpha_1} + \ldots + \varphi_r\theta'^{\alpha_r}}{H'^{\alpha_r}}$$

on a

$$\varphi_0 H'^{\alpha_r} + \varphi_1\theta'^{\alpha_1}H'^{\alpha_r-\alpha_1} + \ldots + \varphi_r\theta'^{\alpha_r} \equiv 0(\mathfrak{P}^*)$$

mais, comme $\mathfrak{P}^*$ est bihomogène et tous les térmes, à exception du prémièr, contiennent efectivement des (ξ), il resulte que

$\varphi_0 H'^{\alpha_r} \equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ d'òu $\varphi_0(\eta) \equiv 0\,(\mathfrak{P}^*)$ et alors $\varphi_0(\eta) \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}}_2)$. Contradiction. Par consequent dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_2) =$ dim. $(\bar{P}'\,\mathfrak{P}_1')$ et $\bar{\mathfrak{p}}_2 = \bar{P}'\,\mathfrak{P}_1'$. De dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_2') \geqslant$ dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_2)$ et dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_2') \leqslant$ dim. $(\bar{P}'\,\mathfrak{P}_1')$ il resulte dim. $(\bar{\mathfrak{p}}_2') =$ dim. $(\bar{P}'(\mathfrak{P}_1'))$ et $\bar{\mathfrak{p}}_2' = \bar{\mathfrak{p}}_2$. Or, comme P_2^* dépend intégrement de $\bar{P}'$, il résulte ([2], Th. 9) que $\mathfrak{p}_2^*$ et $\mathfrak{p}_2^{*\prime}$ sont des idéals prémiers minimes de $P_2^*\,\bar{\mathfrak{p}}_2$ et comme $\mathfrak{p}_2^{*\prime} \subseteq \mathfrak{p}_2^*$ on déduit $\mathfrak{p}_2^{*\prime} = \mathfrak{p}_2^*$. Finalément, comme $P^*_{(H')} = P^*_{2(H')}$ et $H' \equiv_| \equiv 0\,(\mathfrak{p}_2^*)$ il resulte $P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^* = P^*_{(H')}\,\mathfrak{P}^{*\prime}$, et d'ici $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}^{*\prime}$.

Q. e. d.

Corollaire. Si W *est régulièr par rapport, à* W_1' *dans la correspondance algébrique* T *pour laquelle* b=0, *on vérifie que*

$$\dim.(W_1') = \dim.(W) + a.$$

§ 13. Transformée totale d'une sous-variété.

Définition 1.13. On appelle, [8], *transformée totale* d'une sous-variété de V, a l'ensemble de les variétés homologues de tous ses points.

Soient $\mathfrak{P}_i^*$, $i=1, \ldots, r$ tous les diviseurs prémiers minimes de $P^*\,\mathfrak{P}$ qui ne gissent pas sur l'idéal irrelevant de P, on vérifie le suivant :

Théorème 1.13. La transformée totale, $T\{W\}$, *d'une sous-variété irreductible,* W, *definie par l'idéal* $\mathfrak{P}$, *est l'ensemble de tous les sous-variétés de* V′ *définies par les idéals* $\mathfrak{P}_i' = \mathfrak{P}_i^* \cap P'$, $i=1, \ldots, r$.

Démonstration. Soit P un point quelconque de W et $\mathfrak{P}_0$ le idéal homogène correspondant, alors on a $\mathfrak{P}_0 \supseteq \mathfrak{P}$, d'òu $P^*\,\mathfrak{P}_0 \supseteq P^*\,\mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{P}_{i0}^*$ est un diviseur prémier minime de $P^*\,\mathfrak{P}_0$ qui gît sur $\mathfrak{P}_0$ on a $\mathfrak{P}_{i0}^* \supseteq \mathfrak{P}_i^*$, òu $\mathfrak{P}_i^*$ est un d.p.m. de $P^*\,\mathfrak{P}$ qui ne gît pas sur l'irrelevant de P, donc $\mathfrak{P}_{i0}^* \cap P' \supseteq \mathfrak{P}_i'$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Réciproquement, soit P′ un point quelconque de la variété $\{W'_1 + W'_2 + \ldots + W_r'\}$ définie par les idéals $\mathfrak{P}_i'$, $i=1, \ldots, r$; soit, par exemple, $P' \in W_j'$ et $\mathfrak{P}_{0j}'$ l'idéal homogène correspondante à P′ ; alors on a $\mathfrak{P}_{0j}' \supseteq \mathfrak{P}_j'$. Si $\mathfrak{P}_{0j}' = \mathfrak{P}_j'$ nous avons fini la démonstration. Soit, pour tant, $\mathfrak{P}_{0j}' \supset \mathfrak{P}_j'$; alors il y a une évaluation, v'', de Σ' avec son centre en $\mathfrak{P}_{0j}'$ sur V′ et composée avec l'évalutation v' subordonnée dans Σ' par une évaluation, v^*, de

Ω avec son centre en $\mathfrak{P}_j{}^*$ dans $\mathfrak{B}$. Par la Prop. 2.4, il-y-a une *evaluation*, v^{**}, de Ω composée avec v^* et amplifiée de l'évaluation v''. Soit $\mathfrak{P}_{ij}$ le centre de l'évaluation, $\bar{v}$, subordonnée par v^{**} dans Σ. Alors on a $\mathfrak{P}_{ij} \supseteq \mathfrak{P}$, (L. 2 [8]). Si $\mathfrak{P}_{ij}$ n'est pas de dimension zéro, nous prendrons un diviseur prémier et homogène, $\overline{\mathfrak{P}}_0$, de celui-là de dimension zéro, et alors $\overline{\mathfrak{P}}_0 \supset \mathfrak{P}_{ij}$ et il y aura une évaluation, $\bar{\bar{v}}$, de Σ avec son centre en $\overline{\mathfrak{P}}_0$ et composée avec $\bar{v}$. Par la mentionné Prop. 2.4, il-y-a une évaluation, v^{***}, de Ω composée avec v^{**} et amplifiée de $\bar{\bar{v}}$, qui subordonnera dans Σ' une évaluation, v''', avec son centre en $\mathfrak{P}'''$, qui sera diviseur de $\mathfrak{P}_{0j}{}'$ et comme ceci a dimension zéro, on a $\mathfrak{P}''' = \mathfrak{P}_{0j}{}'$.

Q. e. d.

LITTERATURE MENTIONNEE DANS LE TEXTE

1 W. Krull.—Allgemeine Bewertungstheorie, J. f. reine u. angw. Math. T. 167, pages 160-196.

2. » .—Beiträge zur Arithmetik der konmutative Bereiche III. Zur Dimensions Begriff der Idealtheorie. Math. Zeit. 42.

3. » .—Idealtheorie, Ergebnisse der Mathematik u. i. Grenzgebiete, tomo IV, Berlin, 1935. Springer.

4. E. Nöther.—Abstrakter Aufbau der Idealtheorie. Math. Ann. 96.

5. B. L. v. d. Waerden.—Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen, Math. Ann. 110.

6 » .—Moderne Algebra, II. 2.ª edic. Springer, 1940.

7. O. Zariski.—Some results in the arithmetic Theory of Algebraic Varieties. Am. Jour. of Math. 61. 1939.

8 » .—Foundations of a general Theory of Birational Correspondences. Trans. Am. Math. Soc. 53, 1943.

9 » .—Birational Correspondences and Normal Varieties, Bull. Am. Math. Soc. 1942.

Mayo, 1948.

Universidad de Zaragoza.
Consejo Superior de Investigaciones Científicas.